论丛

王元论哥德巴赫猜想

【数学名家论丛】

哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力，这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。

◎李文林\主编

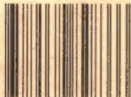
◎山东教育出版社

王元

论哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力，这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的

ISBN 7-5328-2833-6



ISBN 7-5328-2833-6/O·26

定价：22.50元

论丛



【数学名家论丛】

王元论哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力，这些方法不仅对于数论自身，而且对于数学的许多分支都是很有用的。

◎李文林\主编

◎山东教育出版社



王元论哥德巴赫猜想

李文林　主编

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）
电　　话：(0531) 2023919　传真：2011455
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂
版　　次：1999 年 9 月第 1 版
1999 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1—3000
规　　格：880mm × 1230mm　32 开本
印　　张：16 印张
插　　页：8 插页
字　　数：395 千字
书　　号：ISBN 7-5328-2833-6/O·26
定　　价：22.50 元

华罗庚先生与他的学生（左5王元，左7华罗庚）▷





◁ 与华罗庚先生在一起

与苏步青先生一起去日本（左起：胡和生，苏步青，村上信吾，王元）▷





◁ 1981年与年轻学部委员在一起



1995年在台湾（中立者为合作者方源）▷



◁ 1992年在香港



1989年与肖文杰夫妇在北京 ▷

朝辭白帝彩雲間千里
江陵一日還两岸猿聲啼
不住輕舟已過萬重山

李白诗一首　戊寅　玉元



清明時節雨紛紛路上行
人欲斷魂借問酒家何處
有牧童遙指杏花村

杜牧詩一首 慕鵬先生雅屬 戊寅 王元





图书在版编目(CIP)数据

王元论哥德巴赫猜想/李文林主编.—济南：山东教育出版社，1999

(数学名家论丛)

ISBN 7—5328—2833—6

Ⅰ.王… Ⅱ.王… Ⅲ.哥德巴赫猜想—研究 Ⅳ.0156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 24930 号

序

本书是王元院士多年来在国内外各种刊物上发表的部分论述性文章（不包括专门的学术论著）的汇集. 内容分为四大部分：第一部分是全书的核心，论述哥德巴赫猜想的历史、意义、研究方法与进展，进而涉及当代数论的成就、应用及其在数学中的地位等；第二部分"综合论述"，从更广阔的视角阐发作者对整个数学的认识，以及作者在担任中国科学院数学研究所所长和中国数学会理事长等领导实践中形成的对发展中国现代数学的看法、见解，这部分还包括了以青少年为对象的关于如何学习与钻研数学的体会；第三部分"数学家"，收集了作者为我国现代数学史上一些著名数学家所写的纪念与评述文章，是中国现代数学的珍贵史料；最后一部分为作者个人成长经历与学术道路的自述.

本书书名强调了哥德巴赫猜想这一主题. 在数学史上，著名的猜想占有重要地位，这不仅是因为它们的难度使它们具有诱人的魅力，而且更由于在问题解决过程中产生的新概念与新方法对于整个数学进步的推动. 哥德巴赫猜想正是这样的著名问题. 在即将过去的世纪里，哥德巴赫猜想的研究取得了巨大进展，其中中国数学家留下了最辉煌的记录，王元的名字也因他在这方面的关键贡献（详见代导论及正文）而与这一著名的猜想联系在一起. 另一方面，为解决这样的世界难题而作出的巨大努力，必然深刻影响着一个数学家的数学思想和数学观. 主要基于上述这样一些考虑，本书书名中

突出了哥德巴赫猜想，但本书广泛的题材和王元院士丰硕的科研成果（参见代导论）都大大超出了哥德巴赫猜想的范围.

正如希尔伯特在列出包括哥德巴赫猜想在内的 23 个数学问题时所指出："数学的有机的统一，是这门科学固有的特点." 面对分支越来越多的现代数学，有成就的数学家站在更高的高度考察数学的历史、特点、研究方法与发展趋势，他们在这方面的观点对于加深对数学作为有机整体的认识，引导创造性的研究，具有不可低估的作用. 同时，他们深入浅出的说明也有力地促进了社会公众对数学的了解. 在这样的意义上，可以说，出版著名数学家的论述性文集，比出版一本专门的数学论著更有影响. 因此，我们要感谢山东教育出版社为出版本书所作的努力和支持，感谢王元院士欣然同意将他的有关论述编纂成集，以飨读者.

本书是由王元院士亲自参与编选的，定稿之后，王元院士将全部稿件交给我通读，并嘱为之作序，这使我感到莫大的荣幸，同时又诚恐自己才疏学浅而有负信托. 我于 1965 年从中国科技大学分配到数学所，当时王元已因哥德巴赫猜想等研究而享有声誉. 1987 年我担任数学研究所党委书记，有机会与当时任所长的王元院士合作共事. 这是一段难忘的相处，这位著名学者在科研领导方面表现出来的远见卓识与民主风范，同样给我留下了深刻的印象，我们从此建立了密切的关系. 在此次阅读文稿的过程中，联想多年来王元院士在工作和数学史事业上对我的热情扶持以及学术方面的谆谆教诲，不禁释虑从命，谨志小序，祝贺《王元论哥德巴赫猜想》文集的成功出版.

李文林

1998 年 6 月 12 日

目 录

综合论述

数　学　家

自　述

王元：生平与工作简介（代导论）

李文林　袁向东

王元于1930年4月30日出生于浙江省兰谿县．他的父亲王懋勤当时任兰谿县长．抗日战争开始后，举家迁往四川，居于重庆江北县悦来场乡下．家庭生活颇难．王元的小学就是在战乱与艰难中，在农村小学中度过的．

1942年，王元小学毕业，考取了位于合川县的国立第二中学．那时他的父亲出任中央研究院总办事处主任秘书．1946年，随家一起回到南京，转入社教附中就读高中二年级，一年后，学校改名为南京市立六中．

1948年，高中毕业．王元考取位于浙江金华的英士大学数学系．1949年，随英士大学并入浙江大学数学系就读．浙江大学是我国著名数学家陈建功与苏步青教授多年执教的地方．特别是他们倡导的高年级学生读书讨论班，对于培养学生的独立工作能力很有帮助，浙大数学系的良好环境培育了王元对数学的浓厚兴趣．大学四年级时，王元在读书讨论班上报告了英格姆（A. E. Ingham）的“素数分布论”（The distribution of prime numbers, Camb, Tracts 30, 1932），解析数论的优美深深地吸引着他．

1952年，王元以优良的成绩从浙大毕业．在陈建功与苏步青教授的推荐下，由政府分配到中国科学院数学研究所工作．一年后，他被分配到数论组，在华罗庚教授指导下，研究解析数论．

王元在数论组很快显示出数学才能. 1954年，波兰数学家库拉托夫斯基（K. Kuratowski）来华访问，带来了西尔宾斯基（W. Sierpinski）与辛哲尔（A. Schingel）关于数论函数的论文. 王元对这些工作作了一些改进，他的处女作就是与辛哲尔合作的《关于函数$\varphi(n)$, $\sigma(n)$与$\theta(n)$若干性质的一个注记》并在波兰发表. 以后他就致力于筛法与哥德巴赫（C. Goldbach）猜想的研究，并于1957年证明（2, 3），即每个充分大的偶数都是一个不超过2个素数之积与一个不超过3个素数之积之和.

1958年，华罗庚与王元一起合作研究数论方法在近似分析中的应用，特别是高维空间的数值积分问题. 他们建立了基于经典代数数论与丢番图逼近论的高维积分近似计算方法，他们的这一合作延续了二十年.

1966年，"文化大革命"中断了王元的工作，他受到了错误的批判与不公正的待遇. 1972年，王元恢复了他的数学研究工作，此后他从事代数数域上的丢番图方程与不等式的研究及与方开泰教授一起研究数论方法在统计中的应用. 1985年以后，王元还从事中国近代数学史的研究.

1978年以后，王元致力于撰写一些专著，计有：《数论在近似分析中的应用》（1978，与华罗庚合作），《哥德巴赫猜想》（1984），《在中华人民共和国普及数学方法的个人体会》（1989，与华罗庚合作），《代数数域上的丢番图方程与不等式》（1991），《统计中的数论方法》（1994，与方开泰合作），《华罗庚》（1995）与《微积分》（1997与方源合作）.

由于王元在数学上的成就，他于1978年被提升为中国科学院数学研究所研究员，1980年被选为中国科学院学部委员（院士）. 王元得到过国家自然科学一等奖（与陈景润、潘承洞一起）、陈嘉庚物质科学奖（与华罗庚一起）及何梁何利数学奖.

王元于1984～1987年任中国科学院数学研究所所长．1988～1992年任中国数学会理事长．1986年以后任全国政协委员．

王元于1967年与郭宝文女士结婚，他们有两个儿子．

数 学 工 作

一 数论

1．筛法与哥德巴赫猜想．

哥德巴赫猜想是1742年哥德巴赫在与欧拉（L. Euler）通信中提出来的，可以表述为：

（A）每个偶数＞5都是两个奇素数之和．

（B）每个奇数＞8都是三个奇素数之和．

显然由（A）可以推出（B）．这一问题至今仍未解决．直至20世纪20年代，由于圆法与筛法的产生，才使这个问题的研究有了一些好的结果．

筛法起源于古老的“埃拉托塞尼氏（Eratosthenes）筛法”．布伦（V. Brun）于1919年对它作出了重要改进，并且用于猜想（A），他证明了（9，9），即每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和，类似地可以定义(a, b)．布伦之后，又出现了其他一些关于筛法的改进．例如赛尔伯格（A. Selberg）筛法（1947），布赫夕塔布（A. A. Buchstab）恒等式（1937）及孔恩（P. Kuhn）加权筛法（1954）等．至1954年，最好的结果为（4，4）（布赫夕塔布，1940）与(a, b) $(a+b\leqslant 6)$（孔恩，1954）．

综合上述方法，王元于1956年与1957年分别证明了：

$$(3,4)(1956),(2,3)(1957). \qquad (1)$$

筛法可以简单叙于下：考虑集合 $P_a=\{m: 1\leqslant m<n, p\mid m(n-m)\Rightarrow p>n^{1/a}\}$，此处 $a\geqslant 2$，n 为偶数及 p 表示素数，若

能证明当 l 为正整数且当 n 充分大时有 $P_{l+1}>0$，则得（l，l），再考虑 $Q_n=\{q:1<q<n,\ p\mid(n-q)\Rightarrow p>n^{1/a}\}$，此处 q 表示素数，则由 $Q_{l+1}>0$ 就导出(1，l).

首先是埃斯特曼（T. Estermann）于 1932 年在广义黎曼（G. Riemann）猜想（GRH）之下证明了：每个大偶数都是一个素数与一个不超过 6 个素数之积之和. 简单记为 $(1,6)_R$

王元将埃斯特曼的结果改进为：

$$(1,4)_R(1956),\ (1,3)_R(1957). \tag{2}$$

利用布伦筛法，素数分布理论与林尼克（Yu. V. Linnik）大筛法，瑞尼（A. Renyi）于 1948 年证明了（1，c），此处 c 是一个常数，瑞尼定理的证明中隐含了下面的中值公式：存在 $\delta>0$，使

$$(M_\delta)\sum_{k\leqslant x^\delta}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\right|$$
$$=O\left(\frac{x}{(l_n x)^{c_1}}\right).$$

此处 $c_1\geqslant 6$ 为一个常数，φ（k）表示欧拉函数及 π（x；k，l）$=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\bmod k)}}1$，其中 p 过素数 $\leqslant x$，若将（M_δ）中的 k 的范围扩大至 $x^{1/2-\epsilon}$，其中 ϵ 为任意正数，则（M_δ）就可以用来代替 $(1,3)_R$ 证明中的（GRH），巴尔巴恩（M. B. Barban）与潘承洞分别在 1961 年与 1962 年独立地证明了（M_δ），其中 $\delta=\frac{1}{6}-\epsilon$ 与 $\delta=\frac{1}{3}-\epsilon$. 潘承洞并由他的 M_δ（$\delta=\frac{1}{3}-\epsilon$）推出了（1，5），以后他们又独立得出（$M_\delta$），其中 $\delta=\frac{3}{8}-\epsilon$ 并推出（1，4）.

王元指出由潘承洞的(M_δ)($\delta=\frac{1}{3}-\epsilon$)即能推出(1，4).

以后，庞比尼（E. Bombieri）与阿·维诺格拉朵夫（A. I.

Vinogradov）于 1965 年分别证明瑞尼公式中 k 的范围可以扩大为 $k \leqslant x^{1/2}/(\ln x)^A$ 与 $x^{1/2-\epsilon}$，此处 $A>0$ 为一个常数，从而由王元证明的 $(1, 3)_R$ 的方法即推出 $(1, 3)$．1966 年，陈景润改进了 $(1, 3)_R$ 的方法并证明了 $(1, 2)$，该结果被称为陈氏定理．1975 年，王元与潘承洞、丁夏畦一起给出了陈氏定理的一个简化证明．

王元还将他处理猜想（A）的方法用于小区间中殆素数的分布及 $\{F(x): x=1,2,\cdots\}$ 中的殆素数分布问题，此处 $F(x)$ 为一个整值多项式．所谓殆素数即素因子个数不超过一个固定常数的整数．我们常常用 P_k 表示素因子个数不超过 k 的殆素数．王元改进了以往的结果，特别地，他首次考虑了小区间中 P_2 的分布．他证明了当 x 充分大时，有 P_2 满足

$$x < P_2 \leqslant x + x^{10/17}. \tag{3}$$

以后引起不少数学家对（3）进行改进．

2．圆法与哥德巴赫猜想．

圆法起源于哈代（G. H. Hardy）与拉马努金（S. Ramanujan）关于整数分拆与表整数为平方和的一篇文章（1918），接着哈代与李特伍德（J. E. Littlewood）在一系列论文中系统地发展了一个新的分析方法——圆法，并用于华林（G. Waring）问题与哥德巴赫问题．他们在（GRH）之下，基本上证明了猜想（B），即每一个大奇数都是三个素数之和．基于素数变数三角和的天才估计，依·维诺格拉朵夫（I. M. Vinogradov）于 1937 年取消了哈代与李特伍德关于猜想（B）证明中的（GRH）．

林尼克于 1951 年将圆法用来处理小区间中的猜想（A），他的研究涉及密度猜想（DH）：命 $0 \leqslant v \leqslant 1/2$ 及 $T>0$，命 $N(T, v)$ 表示 $\zeta(s)$ 在矩形

$$\frac{1}{2} + v \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T$$

中的零点个数，估计式

$$\text{(DH)}\quad N(T,v)\leqslant cT^{1-2v}\ln(T+2)\quad (0<v<1/2).$$

此即密度猜想，它是(RH)的推论，但至今尚未得到证明. 1951 年，林尼克在假定(DH)成立时证明了对于任何整数 n 与 $\varepsilon>0$，皆存在素数 p_1, p_2，使

$$|n-p_1-p_2|\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{7+\varepsilon},$$

其中 $c(\varepsilon)$为依赖于 ε 的正常数，每次出现的值不一定相同.

王元于 1977 年指出了林尼克结果的证明有错并给出了一个正确的证明，详细言之，在较(DH)更弱的假设

$$\text{(DH}')\quad N(T,v)\leqslant c(\varepsilon)T^{1-2v}\ln(T+2)\left(0<v<\frac{12}{37}+\varepsilon,\ \varepsilon>0\right)$$

之下，他证明了对于任何整数 n，皆存在 p_1, p_2，使

$$|n-p_1-p_2|\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{148/13+\varepsilon}. \tag{4}$$

王元与单墫还证明了：命 q，n 为两个正整数满足 $q\leqslant n/c(\ln n)^2$及当q为偶数时，n 亦为偶数，则在(GRH)之下，方程

$$n=p_1+p_2+hq$$

恒有解 p_1，p_2，h，其中 p_1，p_2 为素数，h 为整数，适合 $0\leqslant h\leqslant c(\ln n)^2$，这是林尼克一个结果的改进，他原来结果中 h 的范围为 $0\leqslant h\leqslant c(\varepsilon)(\ln n)^{6+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

3. 素数 p 的最小原根.

所谓模 p 之原根g 即模p 之缩系 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 的生成元. 命 $g(p)$ 表示模 p 之最小正原根，依·维诺格拉朵夫首先在 1930 年证明了：

$$g(p)<2^m p^{1/2}\ln p,$$

此处 $m=\omega(p-1)$表示 $p-1$ 的互异素因子个数. 其后，他将自己的结果改进为 $g(p)<2^m p^{1/2}\ln\ln p$. 华罗庚、爱多士 (P. Erdös) 及爱多士与夏皮罗 (H. N. Shapiro) 又进一步先后证明了

$$g(p)<2^{m+1}p^{1/2},\ g(p)=O(p^{1/2}\ln^{17}p)\text{与}$$
$$g(p)=O(m^c p^{1/2}).$$

其中 c 及与 O 有关常数都是绝对常数.关于 $g(p)$ 的下界估计,吐朗(P. Turan)证明了 $g(p)=\Omega(\ln p)$. 而安琦尼(N.C. Ankeng)在(GRH)之下,证明了 $g(p)=O(2^m\ln^2 p\ln^2(2^m\ln^2 p))$.

利用布尔吉斯(D. A. Burgess)方法,王元(1959)与布尔吉斯(1962)独立地证明了

$$g(p)\leqslant c(\varepsilon)p^{1/4+\varepsilon}. \tag{5}$$

王元(1959)又将安琦尼的结果改进为:在(GRH)之下有

$$g(p)=O(m^6\ln^2 p). \tag{6}$$

王元还改进了以往关于模 p 的最小 n 次非剩余及佩尔氏(J. Pell)方程最小解的估计.

4. 数论函数的分布.

1956年,王元与辛哲尔用布伦筛法证明了下面的结果:对于任何非负整数矢量 $\underline{a}=(a_1,\cdots,a_h)$ 及 $\varepsilon>0$,皆存在整数 n 使

$$\left|\frac{\varphi(n+i)}{\varphi(n+i+1)}-a_i\right|<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant h. \tag{7}$$

进而言之,存在常数 $c_0(\underline{a},\varepsilon)$ 及 $X_0(\underline{a},\varepsilon)$,使当 $X>x_0$ 时,区间 $1\leqslant n\leqslant X$ 中有多于 $c_0X/(\ln x)^{k+1}$ 个 n 适合(7).

过去辛哲尔只能得到使(7)成立的整数 n 的存在性,但不能得到满足(7)的整数个数的估计.

结合布伦筛法及林尼克—瑞尼大筛法,王元于1958年进一步证明了:对于任何非负矢量 $\underline{a}$ 及 $\varepsilon>0$,皆存在素数 p 使

$$\left|\frac{\varphi(p+v)}{\varphi(p+v+1)}-a_v\right|<\varepsilon,\quad 1\leqslant v\leqslant h. \tag{8}$$

进而言之,存在常数 $c_1(\underline{a},\varepsilon)$ 与 $X_1(\underline{a},\varepsilon)$,使当 $X>X_1$ 时,区间1

$\leqslant n \leqslant X$ 中有多于 $c_1 X/(\ln x)^{h+2}\ln\ln x$ 个素数适合(8).

将欧拉函数换成其他数论函数仍有相应的结果.

5. 丢番图方程与不等式的最小解.

对于复矢量 $\underline{x}=(x_1, \cdots, x_s)$，命 $|\underline{x}|=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|x_i|$，对于复系数型 F，命 $|F|$ 表示 F 的系数的最大绝对值. 对于每一个 k 次型 F，皆对应一个型 $\hat{F}(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_k)$，它关于每个 $\underline{x}_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是线性的，且 $F(\underline{x})=\hat{F}(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x})$.

施密特 (W. M. Schmidt) 于 1980 年证明了下述结果：给予整数 $h\geqslant 1$，$m\geqslant 1$ 及奇数 $k_1, \cdots, k_h$ 与一个任意大的数 E，皆存在

$$c_0=c_0(k_1, \cdots, k_{h_j}\cdots, E),$$

使若 $M\geqslant 1$ 及 $F_1, \cdots, F_h$ 分别为 $\underline{x}=(x_1, \cdots, x_s)$ 的次数为 $k_1, \cdots, k_h$ 的实系数型，则当 $s\geqslant c_0$ 时有 m 个在 Z^s 上线性独立的点 $\underline{x}(1), \cdots, \underline{x}(m)$，使

$$|\underline{x}(i)|\leqslant M, \quad 1\leqslant i\leqslant m$$

及

$$|\hat{F}_j(\underline{x}(i_1), \cdots, \underline{x}(i_{k_j}))| \ll m^{-E}|F_j|,$$
$$1\leqslant j\leqslant h, 1\leqslant i_1, \cdots, i_{k_j}\leqslant m.$$

由此推出：给予 $h\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, 奇数 $k_1, \cdots, k_h$ 及 $\varepsilon>0$ 任意小，皆存在常数 $c_1=c_1(k_1, \cdots, k_h; m, \varepsilon)$，使当 $G_1, \cdots, G_h$ 分别为 $\underline{x}=(x_1, \cdots, x_s)$ 的次数为 $k_1, \cdots, k_h$ 的整系数型，此处 $s\geqslant c_1$，则 $G_1, \cdots, G_h$ 在 m 个整点 $\underline{x}(1), \cdots, \underline{x}(m)$ 张成的 m 维子空间上皆为零，此处

$$|\underline{x}(i)| \ll G^{\varepsilon}, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$
$$G=\max(1, |G_1|, \cdots, |G_h|).$$

取一个型 $F=x_1^2+\cdots+x_s^2$，即可知在施密特的上述结果中必

须限制诸型的次数皆为奇数.王元考虑将型的丢番图不等式在全复代数数域中求解,从而取消了型的次数为奇数这一限制.详言之,命 K 为一个 $2r$ 次全复代数数域,其整数环记为 J,对于 $\xi\in K$,命 $\xi^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant 2r)$表示 ξ 的共轭数及 $\|\xi\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2r}|\xi^{(i)}|$,当 $\underset{=}{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$时,命 $\|\underset{=}{\lambda}\|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\|\lambda_j\|$.

王元于 1988 年证明了下面的结果:给予正整数 h,m 及 $k_1,\cdots,k_h$,及一个任意大的整数 E,皆存在常数

$$c_2=c_2(k_1,\cdots,k_h;m,r,E),$$

使若 $M\geqslant 1$ 及 $F_1,\cdots,F_h$ 分别为 $\underset{=}{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$的次数为 $k_1,\cdots,k_h$ 的复系数型,此处 $s\geqslant c_2$,则在 J^s 中有 m 个线性独立点, $\underset{=}{\lambda}(1),\cdots,\underset{=}{\lambda}(m)$,满足

$$\|\underset{=}{\lambda}(i)\|\leqslant M,1\leqslant i\leqslant m$$

与

$$|\hat{F}_j(\underset{=}{\lambda}(i_1),\cdots,\underset{=}{\lambda}(i_{k_j}))|\ll M^{-E}|F_j|,1\leqslant i\leqslant h,1\leqslant i_1,\cdots,i_{k_j}\leqslant m,$$

由此也可以推出系数属于 J 型方程系的最小解的类似结果.

关于模 p 的二次同余方程的最小解问题,希斯—布朗(D. R. heath-Brown)于 1985 年证明过:命 $Q(\underset{=}{x})=Q(x_1,\cdots,x_4)$为整系数二次型,$p$ 为素数,则同余方程

$$Q(\underset{=}{x})\equiv O\ (\mathrm{mod}\,p)$$

有解 $\underset{=}{x}$ 适合

$$0<\max_{1\leqslant i\leqslant 4}|x_i|\ll\sqrt{p}\ln p.$$

柯克朗(Todd Cochrane)将上式的右端改进为$\sqrt{p}$.这是最佳可能的结果.

王元于 1989 年及 1993 年分别将上述结果推广至任意有限域.

王元还研究了代数数域中同余方程组的最小解问题.

二 近似分析与统计

6．近似分析中的数论方法.

近似分析中的数论方法的理论基础为数论中韦尔（H. Wegl）的一致分布论. 其要点为找出空间中较小偏差的点列，称为伪随机数，用它来代替蒙特卡罗方法中的随机数作统计模拟. 所以这种方法又称为伪蒙特卡罗方法. 其最成功的应用为高维定积分的近似计算法.

假定 $f(\underline{x})=f(x_1,\cdots,x_s)$ 为单位立方体 $G_s=\{\underline{x}:0\leqslant x_i\leqslant 1,1\leqslant i\leqslant s\}$ 上定义的函数,我们要求定积分

$$I=\int_{G_s}f(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x},\quad \mathrm{d}\underline{x}=\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_s$$

的近似值，不妨假定 $f(\underline{x})$ 为 G_s 上的周期函数，且每个变数有周期 1，假定 $f(\underline{x})$ 有绝对收敛的傅里叶（J. Rouriev）展开

$$f(\underline{x})=\sum_{-\infty}^{\infty}C(\underline{m})e^{2\pi i(\underline{m},\underline{x})}$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\cdots,m_s)e^{2\pi i(m_1k_1+\cdots+m_sk_s)},$$

此处

$$|C(\underline{m})|\leqslant\frac{C}{\|\underline{m}\|^{a}},\ \|\underline{m}\|=\overline{m_1}\cdots\overline{m_s},$$

$$\overline{m}=\max(1,|m|),$$

其中 $a>1$ 及 $C>0$ 为绝对常数.这种函数类记为 $E_s^a(C)$.

卡罗波夫(N. M. Konolov)(1959)与郝夫卡(E. Hlawka)(1962)独立地证明了对于素数 p,存在整矢量 $\underline{a}=(a_1,\cdots,a_s)$,使

$$\sup_{f\in E_s^a(C)}\left|\int_{G_s}f(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}f\left(\frac{k\,\underline{a}}{p}\right)\right|$$

$$= O\left(\frac{C(\ln p)^{as}}{p\alpha}\right),$$

此处与 O 有关的常数仅依赖于 α、s．这一方法的误差比一维古典方法的直接推广的误差 $O\ (n^{-\alpha/s})$ 与蒙特卡罗方法的概率误差 $O\ (\frac{1}{\sqrt{n}})$ 要好得多．其中 n 表示求积公式所需的点数．但欲得到 $\underline{a}(p)$ 的初等运算量为 $O(p^2)$，所以寻求一个依赖于分点个数 N 的整矢量 $\underline{a}(N)$ 是很重要的问题．

命 F_n（$n=0,\ 1,\ \cdots$）为斐波那契（L. P. Fibonacci）数列，即由 $F_0=F_1=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$（$n\geqslant 0$）定义的整数列，巴赫瓦洛夫（N. S. Bahvalov）（1959）与华罗庚及王元（1960）独立地证明了

$$\sup_{f\in E_2^\alpha(c)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{k}{F_n},\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right)\right|$$
$$= O\left(\frac{Cl_n 3F_n}{F_n^{\alpha}}\right). \tag{9}$$

而华罗庚与王元还证明了(9)式右端的 $\ln 3F_n / F_n^{\alpha}$ 是最佳可能的结果．算出 F_n 所需的初等运算量仅为 $O(l_n 3F_n)$．

华罗庚与王元在一系列论文(1964～1974)中将他们的方法推广至 $s>2$ 的情况．他们的方法基于由一个 s 次全实代数数域 K 的一组独立单位出发，构造出 K 的一组单位 $\eta_k(k=1,2,\cdots)$ 满足

$$\eta_k=\eta_k^{(1)}>k,\ \eta_k^{(i)}\ll\eta_k^{-\frac{1}{s-1}},2\leqslant i\leqslant s.$$

假定 K 的基底为 $\omega_j(1\leqslant j\leqslant s)$，其中 $\omega_j(1\leqslant j\leqslant s-1)$ 为无理数，则

$$\sum_{i=1}^{s}\eta_k^{(i)}=n_k,\ \sum_{i=1}^{s}\omega_j^{(i)}\eta_k^{(i)}=h_{j,k},\ \ 1\leqslant j\leqslant s-1$$

都是有理整数，于是联立有理逼近

$$\frac{h_{j,k}}{n_k}=\omega_j+O(n_k^{-1-\frac{1}{s-1}}),\ \ 1<j\leqslant s-1,$$

命 $\underline{h}_k=(1,h_{1,k_1},\cdots,h_{s-1,k})$，这就是 n_k 所对应的整矢量. 于是得求积公式

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(c)}\left|\int_{G_s}f(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x}-\frac{1}{n_k}\sum_{m=1}^{n_k}f\left(\left\{\frac{m\underline{h}_k}{n_k}\right\}\right)\right|$$

$$=O(Cn_k^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2(s-1)}+\epsilon}),\tag{10}$$

其中与 O 有关的常数依赖于 ϵ，在此得到矢量 $\underline{h}_k$ 的计算量仅为 $O(\ln n_k)$，在实际操作时，华罗庚与王元建议使用分圆域 $Q\left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)(m\geqslant5)$. 华罗庚与王元关于(9)的另一推广基于雅可比 (C. Jacoh)—佩龙(O. Perron)算法.

命 $\underline{r}_i=(r_{1i},\cdots,r_{ti})$，$1\leqslant i\leqslant s$ 为实矢量，$\underline{q}=(q_1,\cdots,q_t)$ 为整矢量及 $(\underline{x},\underline{y})=\sum_{i=1}^{t}x_iy_i$ 表示 $\underline{x}$ 与 $\underline{y}$ 的标量积，王元于 1982 年证明了下述结果：存在 $\underline{r}_1,\cdots,\underline{r}_s$，使

$$\sup_{f\in E_s^2(c)}\left|\int_{G_s}f(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x}-\frac{1}{n^t}\sum_{\substack{q_k=-n\\1\leqslant k\leqslant t}}^{n}\prod_{j=1}^{t}\left(1-\frac{|q_j|}{n}\right)\right.$$

$$\left.f((\underline{r}_1,\underline{q}),\cdots,(\underline{r}_s,\underline{q}))\right|=O(Cn^{-2t+\epsilon}).\tag{11}$$

对于一般的 $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha>1)$ 亦有公式，但加权要复杂一些. 当 $t=1$ 时，已先后由巴赫瓦洛夫，哈塞格罗夫 (C. B. Haselgrove)，华罗庚与王元，卡罗波夫，尼德瑞特 (H. Niederreiter) 获得，有理形式的推广，以后由斯龙 (I. H. Sloan) 得出 (见 I. H. Sloan and S. Joe, Lattice Method for Multiple Integration, Qxford, 1994).

7. 统计中的数论方法.

统计中的问题常常需要用到伪随机数小样本，王元与方开泰于 1981 年首先用数论方法找出一批小样本，即伪随机数，并用于试

验设计问题. 假定一个试验, 共有 s 个因素, 每个因素有 q 个水平, 则共有 q^s 种可能的 s 种因素的水平组合. 让每个组合对应于 G_s 中的一个格点, 数论方法为从这 q^s 个格点中选出$O(q)$ 个点的集合 v, 它们在 G_s 上有较小的偏差. 可在 v 的点上作实验, 根据试验结果, 用回归分析方法求得较好的组合, 我们称这个方法为均匀设计. 这比普通的正交设计所需的试验次数$O(q^2)$ 有较大的减少. 根据在中国工业部门中的应用, 均匀设计方法所得到的结果的精密度是可以与正交设计相比的.

将数论方法用于统计问题时, 还需要有其他一些区域上的一致分布点列, 即偏差较小的点列. 王元与方开泰于 1990 年建议了一个程序, 它由 G_s 上一个一致分布点集出发而得到$A_s=\{\underline{x}:0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_s\leqslant 1\}$, $B_s=\{\underline{x}:x_1^2+\cdots+x_s^2\leqslant 1\}$, $S_{s-1}=\{\underline{x}:x_1^2+\cdots+x_s^2=1\}$及 $T_{s-1}=\{\underline{x}:x_1+\cdots+x_s=1, x_i\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant s\}$上的一致分布点集. 而且基本上可以得到

$$T_{s-1}(\underline{a},\underline{b})=\{\underline{x}:x_1+\cdots+x_s=1,$$
$$a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, 1\leqslant i\leqslant s\}$$

上的一致分布点集, 此处 $a_i\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant s$, $\sum_{i=1}^{s}a_i<1$ 及 $\sum_{i=1}^{s}b_i>1$. $T_{s-1}(\underline{a},\underline{b})$上的一致分布点集实际上对应于一般的混料试验设计.

概率与矩的计算实际上就是多重积分近似计算. 数论方法还可以用于统计中的最优化问题, 多元分布代表点的寻求问题及统计推断问题等.

三　其他工作

8. 正交拉丁方.

由 (1, 2, …, s) 构成的 $s\times s$ 方阵, 如果每个元素都在方阵

的每一行与每一列中恰好出现一次，则称这种方阵为 s 阶的拉丁方．若将两个拉丁方重叠在一起，则上面拉丁方的每个元素恰与下面拉丁方的每个元遇到一次，就称这两个拉丁方是正交的．命 $N(s)$表示 s 阶的两两正交拉丁方的最大个数，欧拉曾猜想：当 $s>6$ 及 $s\equiv 2\pmod 4$时有 $N(s)=0$，巴士（R. C. Bose），希里克汉德（S. S. Shrikhande）与帕克尔（E. T. Parker）对这一问题作出了重要贡献．他们在 1960 年反证了欧拉猜想．他们证明了，当 $s>6$ 时有 $N(s)\geqslant 2$．将他们的方法与布伦筛法结合起来，乔拉（S. Chowla），爱多士与斯特劳士（E. G. Strauo）首先给出了 $N(s)$ 的下界估计：存在 s_0，当 $s>s_0$ 时有 $N(s)>\frac{1}{3}s^{\frac{1}{91}}$．王元于 1964 年将他们的结果改进为：存在 s_1，当 $s>s_1$ 时有

$$N(s)>s^{\frac{1}{26}}. \tag{12}$$

9．近代中国数学史．

王元撰写了《华罗庚》一书．该书除阐述中国近代最重要的数学家华罗庚的数学工作与生平外，还以他为中心，描写了中国数学从本世纪 20 年代由西方及日本引入及其发展的一些重要片段．

参考文献

[1] 李文林，王元，中国现代科学家传记，第一集，卢嘉锡主编，科学出版社，1991，81～88．

[2] 袁向东，王元与数论，中国当代科技精英，数学与信息科学卷，卢嘉锡主编，黑龙江教育出版社，1994，13～25．

哥德巴赫猜想与数论

论哥德巴赫猜想*

一 序

自从1920年以来,哥德巴赫(Goldbach)猜想的研究有了巨大的进展.特别是在1937年,依·麦·维诺格拉朵夫(I. M. Vinogradov)证明了三个素数定理,在1966年,陈景润证明了(1,2).进而言之,我们必须指出,哥德巴赫猜想的研究给予许多强有力的数论方法的产生与发展以巨大的推动力.这些方法不仅对于数论自身,而且对于数学的许多分支都是很有用的.

三个素数定理与(1,2)已经收集在很多专著之中.一本专著常常包含着最后的结果及尽可能简单的证明,从而使读者易于了解,但却很难包含原始思想发展的诸主要步骤.本选集的目的在于尽可能地搜集哥德巴赫猜想研究中具有原始思想及主要技巧的论文,使读者能了解这一问题的研究的全过程中的各主要阶段,我们期望这将有利于问题的进一步研究.

为了使篇幅不太大,少数文章中的一部分未被收入,对此编者加了注记以说明,所有英文、法文、德文与俄文的论文均被译成中文.

在出版这本论文集时,不能不使我对哥德巴赫猜想的研究在中国的情况作些回顾.中国最早研究哥德巴赫猜想的人是华罗庚教授.

---

* 这是由世界科学出版社出版的《哥德巴赫猜想》(英文版)(1984)的序与导论,中文版由黑龙江教育出版社出版,1987.

早在1938年,他就证明了"几乎所有偶数都是两个素数之和".

1952年,中国科学院数学研究所成立了数论研究组,由华罗庚亲自担任组长,他组织并领导了"哥德巴赫猜想讨论班".他选择哥德巴赫猜想作为学习与研究对象的指导思想是,考虑到哥德巴赫猜想与解析数论最重要的理论与方法都有密切关系,特别是圆法、三角和估计、密率论、筛法、L-函数理论与素数分布论等,通过讨论班的学习,可以使参加者相当全面地掌握解析数论的诸重要方面,达到既出成果又出人才的良好效果.

哥德巴赫猜想讨论班无疑是非常成功的.参加者曾几次得到关于哥德巴赫猜想的重要结果,受到国内外的注视.可惜这样的讨论班仅进行了五年,即被迫停止了.1958年,在我国数学界中曾掀起批判"理论脱离实际"的运动,哥德巴赫猜想研究被指控为理论脱离实际的典型,数论研究组因此而被解散,人员被拆散了.虽然如此,一些讨论班的参加者,特别是陈景润与潘承洞同志,仍在私下坚持了哥德巴赫猜想的研究工作,甚至在"文化大革命"的浩劫中亦未放弃.他们在这样困难的环境下,取得了出色成就,是十分难得的.

另一方面,国内确有相当多的人在研究哥德巴赫猜想.由于他们的研究不得法,主要是他们的数学基础太差,不了解这个问题研究的历史与成就,他们仅仅从整数的定义出发来研究这个猜想,所以浪费了很多宝贵的光阴,并无收效.

最后,我对于潘承彪教授与其学生和於坤瑞教授给予的多方面帮助,表示衷心的感谢.在准备手稿时,承郭宝文同志的热情帮助,在此致以谢意.

王 元

1986年5月20日

二 导 论

在1742年给欧拉（Euler）的一封信中，哥德巴赫建议了关于表整数为素数和的两个猜想，用略为修改过的语言，可以将这两个猜想表述于下：

（A）每一偶数≥6都是两个奇素数之和.

（B）每一奇数≥9都可以表为三个奇素数之和.

显然，由（A）可以推出（B）.

在回复哥德巴赫的信中，欧拉表示虽然他不能证明它们，但他深信这些猜想是对的（见狄克逊（Dickson））.

从哥德巴赫写信起到今天，已经积累了不少宝贵的数值资料，指出这两个猜想是对的．例如申懋功（Shen Mok Kong）验证过猜想（A）对于不超过 3.3×10^7 的偶数是对的．勒依特、富勒斯、哈蒙特与洛易（Light, Forres, Hammond and Roe）进一步算至 10^8．尹定更验算至 5×10^8.

在1900年巴黎召开的第二届国际数学大会上，希尔伯特（Hilbert）在他的著名演说中，为20世纪的数学家建议了二十三个问题，而猜想（A）就是他的第八问题的一部分．1912年在剑桥召开的第五届国际数学大会上，兰岛（Landau）在他的演说中，将猜想（A）作为素数论中四个未解决的难题之一加以推荐．进而言之，1921年，哈代（Hardy）在哥本哈根数学会的演讲中宣称猜想（A）的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”．因此哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与困难的问题之一.

自从哥德巴赫写信之日起，直至1920年，并没有方法来处理这个问题．研究工作仅限于用数值计算来验证猜想（A），或对于猜想（A）作一些进一步的建议（见狄克逊，哈代）

哥德巴赫猜想第一次重大的突破是20年代获得的，英国数学家哈代与李特伍德（Littlewood）用他们的“圆法”在1923年证明了，在广义黎曼（Riemann）猜想正确的前提之下，每个充分大的奇数都是三个奇素数之和及几乎所有偶数都是两个奇素数之和．挪威数学家布朗（Brun）在1919年用他的“筛法”证明了，每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和．1930年，原苏联数学家史尼尔曼（Schnirelmann）用布朗筛法结合他自己定义的整数密率，证明了堆垒素数论的第一个结果，即任何整数≥2都是不超过C个素数之和，此处及以后，我们用c，c_1，c_2，…表示绝对常数，但在不同的地方可以表示不相同的数值．近六十年来，哥德巴赫问题的研究有了重大与深刻的发展，特别是原苏联数学家依·麦·维诺格拉朵夫用圆法及他自己关于素数变数的指数和估计的天才方法，于1937年无条件地证明了哈代与李特伍德的两个结论，即取消了他们证明中对于广义黎曼猜想的依赖性．布朗方法及他的结果在经历了一系列重大改进后，中国数学家陈景润于1966年证明了，每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数之积之和．

我们必须注意，哥德巴赫猜想研究的突破是与19世纪解析数论的重大成就是明显不可分割的，特别是切比雪夫（Chebychev），狄里希勒（Dirichlet），黎曼，阿达玛（Hadamard），德·拉·瓦·布桑（de la Vallee poussin）与冯·曼哥尔德（von Mangoldt）关于素数分布的理论构成了哥德巴赫猜想当今研究的前提．

现在，我们将哥德巴赫猜想研究的主要构思与进展，概要地叙述于后．

1．圆法．

圆法起始于哈代与拉曼努扬（Ramanujan）关于整数分析与表整数为平方和的一篇文章，更进一步，从1920年开始，在总标题为《“整数分析”的若干问题》（“Some proble ms of” partitio nu-

merorum”）的一系列论文中，哈代与李特伍德系统地开创并发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法——圆法，其中文章（Ⅲ）与（Ⅴ）是讨论哥德巴赫猜想问题的.

命

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1.$$

当 $\sigma\leqslant 1$ 时，$\zeta(s)$ 可以由解析开拓来定义. $\zeta(s)$ 称为黎曼 ζ-函数. 黎曼曾猜测 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 上所有的零点 $\rho=\beta+i\gamma$ 都位于直线 $\sigma=1/2$ 上面. 这是一个未解决的问题，我们记之为(RH). 一个较弱的猜想是说，$\sigma>0$ 上面的每个 ρ 的实部均 $\leqslant\theta$，此处 θ 满足 $\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$. 这称为弱黎曼猜想，记之为（QRH）. 更一般些，我们可以研究狄里希勒 L-函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1,$$

此处 $\chi(n)$ 为 $\bmod q$ 的一个特征. 若 $\chi\neq\chi_0$，则它在 s 平面上正则，此处 χ_0 表示主特征. 否则，它仅在 $s=1$ 有一个唯一的极并且 $L(s,\chi_0)=\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$，此处 p 表示素数，类似于(RH)与(QRH)，我们可以定义(GRH)与(QGRH)，即 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma>0$ 上的所有零点都位于 $\sigma=1/2$ 上，及 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma>0$ 上的每一零点 ρ 都满足 $\beta\leqslant\theta$，此处 θ 是一个满足上述条件的常数. 哈代与李特伍德的两个结果是基于假定(QGRH)之下而得到的，此处 θ 满足 $1/2\leqslant\theta<3/4$.

此后，我们用 $p,p',p_1,p_2,\cdots$ 表示素数，命 n 为一个整数 >1. 命

$$f(x)=\sum_{p>2}(\log p)x^p,\tag{1}$$

此处 $|x|=e^{-1/n}$，则

$$f(x)^3=\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)x^n,$$

此处

$$r_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \tag{2}$$

为将 n 表为三个素数之和的表示法的加权和.我们可以类似地定义 $r_2(n)$.所以猜想(A),(B)可以表述为

$$r_2(n)>0(2\mid n, n>4) \text{与} r_3(n)>0(2\nmid n, n>7).$$

由柯西积分公式得

$$r_3(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(x)^3 x^{-n-1}\mathrm{d}x, \tag{3}$$

此处 Γ 表示以 0 为中心,$e^{-1/n}$ 为半径的圆周.因 $f(x)$ 可以精密地由 $f(e^{-1/n}e(\frac{h}{q}))$ 来近似逼近,此处 $e(y)=e^{2\pi iy}$ 及 $x(\in\Gamma)$ 为 $e^{-1/n}e(\frac{h}{q})$ 的一个邻近点,所以 Γ 被分割为诸小弧 ξ_{hq} 之和,此处 ξ_{hq} 上的点 x 的幅角位于

$$\left(\frac{h}{q}-\frac{1}{q(q+q')}\right)2\pi \text{ 与 } \left(\frac{h}{q}+\frac{1}{q(q+q'')}\right)2\pi (\bmod 1)$$

之间,其中 $\frac{h'}{q'}, \frac{h}{q}, \frac{h''}{q''}$ 为阶为 $N=[\sqrt{n}]$ 的范里(Farey)贯中的三相邻项,因此

$$r_3(n)=\sum_{q=1}^{N}\sum_{h(q)}{}' \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{hq}} f(x)^3 x^{-n-1}\mathrm{d}x, \tag{4}$$

此处 h 过 $\bmod q$ 的一个缩剩余系,当 $x\in\xi_{hq}$ 时,置

$$x=e\left(\frac{h}{q}\right)e^{-Y},\quad Y=\eta+i\theta,$$

则在假定(QGRH)之下,其中 $1/2\leqslant\theta\leqslant 3/4$,哈代与李特伍德证明了

$$f(x)=\varphi+\Phi, \tag{5}$$

此处

$$\varphi=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)Y} \quad \text{及} \quad \Phi=O(n^{\theta-\frac{1}{4}}(\log n)^C).$$

其中 $\mu(q)$ 与 $\varphi(q)$ 分别表示麦比乌斯(Möbius)与欧拉函数，将(5)代入(4)得

$$r_3(n) \sim \frac{1}{2} \prod_{p \nmid n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) n^2 \quad (2 \nmid n), \tag{6}$$

即当 $2 \nmid n$ 及 n 充分大时，命题(B)成立．进而言之，我们容易从(6)推出将奇数 n 表为三个素数之和的表示法 $R_3(n)$ 的渐近公式，即 $R_3(n)$ 渐近地等于 $r_3(n)(\log n)^{-3}$，但用圆法来处理 $r_2(n)$ 却是无效的，即使假定了(GRH)的真实性亦复如此．主要困难不在于主项而在于误差项．因此，若在(5)中将 Φ 略去，即 φ 被用来代替 f，则得

$$r_2(n) \sim 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} n \quad (2 \mid n). \tag{7}$$

由(7)可知将偶数 n 表为两个素数之和的表示法数 $R_2(n)$ 渐近地等于 $r_2(n)(\log n)^{-2}$．这是哈代与李特伍德〔2〕关于猜想(A)的著名猜想．

在假定(GRH)之下，哈代与李特伍德证明了

$$\sum_{\substack{m=2 \\ 2 \mid m}}^{n} \left(r_2(m) - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid m \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} m\right)^2 = O(n^{\frac{5}{2}+\varepsilon}). \tag{8}$$

此后，我们用 ε 表示任意给定的正数，及含于记号 O 中的常数仅依赖于 ε，命 $E(n)$ 表示不超过 n 的偶数中使猜想(A)不成立的偶数个数，则由(8)立刻推出

$$E(n) = O(n^{1/2+\varepsilon}), \tag{9}$$

由此推知几乎所有的偶数都是两个素数之和．

以后，依·麦·维诺格拉朵夫对圆法作出了一系列重大的改进，其中之一是用有限和

$$F(\alpha)=\sum_{2<p\leqslant n}e(\alpha p) \tag{10}$$

来代替 $f(x)$,因简单的正交关系

$$\int_0^1 e(\alpha k)\mathrm{d}\alpha=\begin{cases}1, & \text{当 } k=0,\\ 0, & \text{其他情形,}\end{cases} \tag{11}$$

得出

$$R_3(n)=\sum_{p_1+p_2+p_3=n}1=\int_0^1 F(\alpha)^3e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha. \tag{12}$$

用这个公式来代替(3).

依·麦·维诺格拉朵夫的改进导源于他在 1928 年关于华林(Waring)问题的一篇文章(见依·麦·维诺格拉朵夫).

命 $\tau=n^{-1}(\log n)^{c_1}$ 及 $Q=(\log n)^{c_2}$. 当 $q\leqslant Q$ 时,命

$$M_{hq}=\left[\frac{h}{q}-\tau,\frac{h}{q}+\tau\right],\ (h,q)=1.$$

这称为一段"优弧". 当 n 充分大时,诸优弧是互不相交的. 所有 M_{hq} 的和集记之为

$$M=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant Q}\ \bigcup_{h(q)}{}' M_{hq},$$

它关于[0,1]的余集称之为"劣弧",记之为 m,所以有

$$\begin{aligned}R_3(n)&=\int_{M}F(\alpha)^3e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha+\int_{m}F(\alpha)^3e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha\\&=I+J(\text{定义}).\end{aligned} \tag{13}$$

因此对于充分大的 n,(B)的证明归结为往证 I 给出 $R_3(n)$ 的主项而 J 仅给出低阶项.

注记:首先是哈代与李特伍德在他们关于华林问题的工作中提出了优弧与劣弧的划分.

估计 I 的困难是由下面的西革尔(Siegel)—瓦尔菲茨(Walfisz)定理克服的.

命 $q\leqslant Q$ 及 $(h,q)=1$,则

$$\pi(x,q,h)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv h(\bmod q)}}1=\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}+$$

$$O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),\tag{14}$$

此处隐含于 O 中的常数依赖于 c_2(见西革尔,瓦维菲茨).

由(14)可知

$$F(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{m=2}^{n-1}\frac{e(\beta m)}{\log m}+O(ne^{-c\sqrt{\log n}}),$$

$$\alpha=\frac{h}{q}+\beta\in M.\tag{15}$$

将(15)代入 I 的表达式得

$$I\sim\frac{1}{2}\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

$$\frac{n^2}{(\log n)^3},2\nmid\gamma.\tag{16}$$

因此困难集中于 $F(\alpha)$的估计,其中 $\alpha\in m$. 1937 年,依·麦·维诺格拉朵夫用他自己独创的关于素数变数指数和估计的天才方法给出了 $F(\alpha)$一个非寻常的估计,即

$$F(\alpha)\ll n(\log n)^{-c},\quad \alpha\in m.\tag{17}$$

此处 c 是一个常数≥3,注意给予 c,我们可以取 c_1, c_2 为依赖于 c 的常数,故由(17)得

$$J\ll n(\log n)^{-c}\int_0^1|F(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\ll n^2(\log n)^{-4}.\tag{18}$$

将(16)与(18)代入(13)得

$$R_3(n)\sim\frac{1}{2}\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

$$\frac{n^2}{(\log n)^3},\ 2\nmid n.$$

由此得出存在一个常数 n_0,使每一奇数 $n(>n_0)$皆为三个素数之和.这个定理称为"维诺格拉朵夫—哥德巴赫定理"或"三个素数定

理".

我们必须指出，下面两个定理在三个素数定理获得证明之前就已经出现了.

(i) 每一大奇数 n 均可以表示为

$$n = p_1 + p_2 + p_3 p_4 \tag{19}$$

(见依·麦·维诺格拉朵夫，艾斯特曼(Estermann)).

(ii) 每一大整数都是两个素数及一个整数的平方之和(见艾斯特曼).

如果在估计 I 时，帕奇(Page)定理被用来代替西革尔—瓦尔菲茨定理，则三个素数定理中的 n_0 是可以算出来的. 波罗斯特金(Borozdkin)给出 $n_0 = e^{e^{16.038}}$.

利用维诺格拉朵夫方法，几位数学家独立地指出，几乎所有的偶数都是两个素数之和，进而言之，对于任何常数 c，他们证明了

$$E(n) \ll n(\log n)^{-c}, \tag{20}$$

此处隐含于≪中的常数仅依赖于 c(见冯·德·柯坡尔德(Vander Corput)，艾斯特曼，海尔布朗('Heilbronn)，华罗庚，朱达科夫(Tchudakov)).

在 1946 年，用哈代与李特伍德原来的将 Γ 分割为 M 与 m 的方法，原苏联数学家林尼克(Linnik)给予 $f(x)$ 一个类似于(17)的估计，从而他给了三个素数定理一个新的证明. 林尼克关于 $f(x)$ 的估计方法是建立在他关于 L—级数的重要密度定理的基础上面的. 这一密度定理被用来代替未被证明的(QGRH)，现将密度定理述于下：

命 $\chi(n)$ 为 mod$q$ 的原特征，命 $N(\beta, T)$ 表示 $L(s, \chi)$ 在矩形

$$\nu \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T$$

中的零点个数，此处 $T \geqslant q^{50}$，$\beta \geqslant 1$ 及 $\nu - \beta - \frac{1}{2}$，则

$$N(\beta, T) \ll q^{2\nu} T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}} (\log T)^{10} + q^{30} \tag{21}$$

(亦见朱达科夫).

以后，于 1975 年，沃恩（Vaughan）给了林尼克关于$f(x)$的估计一个新的证明，进一步的简化证明是潘承彪于 1977 年独立得到的．在他们的证明中，仅用到了 L—函数一些简单的性质，关于指数和$F(\alpha)$的估计，沃恩也给出了一些改进，他的主要思想为运用恒等式

$$-\frac{L'}{L}=-\frac{L'}{L}(1-LG)-L'G=\left(-\frac{L'}{L}-F\right)(1-LG)-L'G+F-LFG.$$

这一点潘承洞也曾独立地指出过（见潘承洞，丁夏畦与王元）.

应用密度定理的进一步结果，沃恩在 1972 年证明了

$$E(n)\ll ne^{-c\sqrt{\log n}}. \tag{22}$$

以后，蒙哥玛利与沃恩于 1975 年又改进了（22），他们证明了存在常数 δ 使

$$E(n)\ll n^{1-\delta}. \tag{23}$$

陈景润与潘承洞〔1〕曾指出 $\delta>0.01$，而陈景润〔5〕又将这个估计改进为 $\delta>0.04$.

此外，林尼克首先用圆法证明了下面两个重要定理：

(i) 对于任何整数 $g>1$，皆存在 $k_0>0$，使当 $k>k_0$ 时，每一大整数$\equiv kg$ (mod2) 皆可以表示为

$$n=p_1+p_2+g^{x_1}+\cdots+g^{x_k}, \tag{24}$$

此处 x_1，…，x_2 为正整数.

(ii) 在假定（RH）之下，对于任意整数 $n>1$，皆存在 p_1，p_2 使

$$|n-p_1-p_2|\ll(\log n)^{3+\varepsilon} \tag{25}$$

成立.

关于这两个问题，阿·依·维诺格拉朵夫，加勒革尔（Gal-

lagher)，凯蒂（Katai），蒙哥玛丽与沃恩，王元，帕拉哈(Prachar)，潘承洞，陆鸣皋，及王元与单墫均作过有价值的贡献，例如凯蒂证明过，(25) 的右端可以换成 $(\log n)^2$.

2．筛法.

筛法导源于公元前 250 年的"埃拉朵斯染尼氏筛法"．埃拉朵斯染尼氏注意到$\sqrt{n}$与 n 之间的素数可以从序列 2, 3, …, n, 去掉不超过$\sqrt{n}$的任何素数的倍数而得到．命$\pi(x)(=\pi(x, 1, 1))$表示$\leqslant x$ 的素数个数及 $\prod = \prod\limits_{p<\sqrt{n}} p$,

则

$$1+\pi(n)-\pi(\sqrt{n})=\sum_{a\leqslant n}\sum_{d\mid(a,\Pi)}\mu(d)=\sum_{d\mid\Pi}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]. \tag{26}$$

如果我们用$\frac{n}{d}+\theta$ $(-1<\theta\leqslant 0)$ 来代替$\left[\frac{n}{d}\right]$，则 (26) 式中将产生误差项

$$O(2^{\pi(n)}), \tag{27}$$

与 n 相比，这样大的误差项致使埃拉朵斯染尼氏筛法几乎是无用的.

1919 年，布朗提出了他的新筛法并成功地用于数论中许多困难的与重要的问题．特别是哥德巴赫问题，这是筛法的一个重大进展．1947 年，赛尔贝格（Selberg）给出了另一个筛法，对于每一个可以应用的情况，均可以得到比布朗筛法更为精密的结果．进而言之，赛尔贝格的上界方法是异常简单的，而且具有最后形式的样子．总之，这些方法构成了数论的不可少的工具.

布朗与赛尔贝格方法的精华在于用不等式来代替

$$\varDelta(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 当\ n=1\\ 0, & 其他情况\end{cases} \tag{28}$$

从而使埃拉朵斯染尼氏筛法中的误差项得以减少.布朗定义了两个整数集合 D_1 与 D_2 满足

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \in D_1}} \mu(d) \leqslant \Delta(n) \leqslant \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in D_2}} \mu(d), \tag{29}$$

其中 D_1 与 D_2 的构造颇复杂并具有很大的组合性质.赛尔贝格注意到对于任何满足 $\lambda_1 = 1$ 的实数集合 λ_d 均有

$$\Delta(n) \leqslant \Big(\sum_{d \mid n} \lambda_d\Big)^2, \tag{30}$$

选择适当的 λ_d，则得赛尔贝格的上界方法. 赛尔贝格仅发表了他的上界方法，并指出了它在构造他的下界方法时的作用，但并未发表细节，赛尔贝格的想法由王元，阿·依·维诺格拉朵夫，列文(Levin) 及朱尔凯特与黎切尔特 (Jurkat and Richert) 等加以发展与完善.

命 $A = \{a_\nu\}$ 为一个有限整数集合，命 P 表示一个有限素数集合，进而言之，命 $F(A, P)$ 表示 A 中未被 P 筛去的元素个数，取 $a_\nu = \nu(n-\nu)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ 及 P 表示所有 $\leqslant n^{\frac{1}{l+1}}$ 的素数，此处 $2 \mid n$ 及 l 为一个自然数. 记 $F(A, P) = F(n, n^{\frac{1}{l+1}})$. 假定当 n 大时，我们可以得到 $F(n, n^{\frac{1}{l+1}})$ 的一个正的下界估计，则可以由此推出每一充分大的偶数 n 都是两个不超过 l 个素数的乘积之和. 我们将这一命题记之为 (l, l). 类似地，对于 $l \neq m$，我们可以定义 (l, m).

布朗首先证明了 (9, 9)，布朗的方法与他的结果被几个数学家加以改进. 例如，(7, 7) (拉代马海尔 (Rademacher, 1924)，(6, 6) (艾斯特曼，1932) 及 (5, 7)，(4, 9)，(3, 15) 与 (2, 366) (黎切 (Ricci)，1937).

如果将一些组合方法巧妙运用，则布朗与赛尔贝格的方法的威力均将大大加强. 组合思想有两大类：一个是运用某些组合恒等式

来迭代. 这一思想导源于布赫夕塔布（Buchstab）在 1937 年发表的一篇文章. 另一想法为孔恩（Kuhm）所首创, 他在 1941 年引进了加权筛法.

命 $F(A, q, q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数: $a_v \equiv 0 \pmod{q}$ 及 $a_v \not\equiv 0 \pmod{p}$ $(p < q')$, 则

$$F(A, p_s) = F(A, p_t) - \sum_{p_t \leqslant p < p_s} F(A, p, p). \tag{31}$$

这个恒等式被称为布赫夕塔布恒等式. 由 $F(A, p_t)$的一个下界估计及诸 $F(A, p, p)$的上界估计, 即可导出 $F(A, p_s)$的一个下界估计. 类似地, 我们可以得到 $F(A, p_s)$的一个上界估计. 用(31)式来进行逐步迭代, 我们可以得到 $F(A, P)$的较好的上界与下界估计. 运用赛尔贝格方法, 朱尔凯特与黎切尔特于 1965 年对于某种 $F(A, P)$, 得到了他们上界与下界估计的显式表达式. 命 $F(A, b, q, q')$表示 A 中适合下面条件的元素个数: $a_v \not\equiv 0 \pmod{p}$ $(p < q)$及 a_v 至多适合同余式 $a_v \equiv 0 \pmod{p'}$ $(q \leqslant p' < q')$中的 b 个, 则

$$F(A, b, q, q') \geqslant F(A, q) - \frac{1}{b+1} \sum_{q \leqslant p < q} F(A, p, q). \tag{32}$$

选取适当的 q, q' 与 b, 则 $F(A, b, q, q')$的一个正的估计常常引出哥德巴赫问题的较好结果, 布赫夕塔布在 1938 年与 1940 年分别证明了(5,5)与(4,4), 其中塔尔塔科夫斯基(Tartakovskii)也宣布过(4,4). 孔恩于 1954 年首先证明了$(a, b)(a + b \leqslant 6)$.

将布朗、赛尔贝格、布赫夕塔布与孔恩的方法综合使用, 王元于 1956 年证明了(3,4), 并于 1957 年证明了(3,3), $(a, b)(a + b = 5)$与(2,3). 阿·依·维诺格拉朵夫在 1956 年也独立地证明过(3,3), 赛尔贝格曾宣布过(2,3), 但未见他发表过证明, 其后, 列文与巴尔巴恩(Barban)于 1963 年给出(2,3)以另证, 在他们的证明中, 数值计算是简化了, 但却需用较深的分析方法.

如果我们取 $A = \{n - p, p < n\}$及 P 为$\leqslant n^{\frac{1}{l+1}}$的所有素数, 则

由 $F(A,P)$的一个正下界即可推出$(1,l)$,这个集合 A 是艾斯特曼在 1932 年首先引进的,他首先在(GRH)之下证明了(1,6).1956 年,在同样的假定下,王元与阿·依·维诺格拉朵夫将(1,6)改进为(1,4),王元并于 1957 年给出进一步的改进(1,3).

为了去掉上述结果中未经证明的猜想,还需新的想法与方法、至今所研究的筛法均为对于每个 $p\in P$,将 A 中属于剩余类 $0(\mathrm{mod}\,p)$ 者筛掉.但在某些应用中,对于每个 $p\in P$,需将 A 中属于诸剩余类

$$h_{p,1},\cdots,h_{p,k(p)}\ (\mathrm{mod}\,p)$$

的元素都筛掉,布朗与赛尔贝格方法可以有效地用于这种情况,即就平均而言,$k(p)$ 相比于 p 是很小的.否则它们是无效的.1941 年,林尼克提出了一个天才的方法,即所谓大筛法,可以得到就平均而言,$k(p)$ 比较大时,A 中不超过 n 而又未被筛去的元素个数的一个上界估计.匈牙利数学家瑞尼(Renyi)从多方面改进了林尼克的方法并于 1948 年成功地证明了 $(1,c)$,大筛法方面进一步的重要改进是 1965 年由罗斯(Roth)与庞比尼(Bombieri)得到的,在瑞尼的文章中,他用大筛法证明了一个关于 $\pi(x,h,l)$ 的中值公式,在证明 $(1,c)$ 时,它可以用来代替(QGRH),这个公式为

$$\sum_{k\leq x^{\delta}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{\mathrm{li}\,x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right). \qquad (33)$$

注意在瑞尼的原作中,$\pi(x,h,l)$ 需改成一个加权和.如果(33)对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立,则它可以用来代替艾斯特曼、阿·依·维诺格拉朵夫与王元的结果中的(GRH)(见王元).

在 1961 年,巴尔巴恩证明了(33),其中 $\delta=1/6-\varepsilon$.1962 年,潘承洞独立地证明了(33)及(1,5),其中 $\delta=1/3-\varepsilon$.1962 年,王元指出(1,4)可以从 $\delta=1/3-\varepsilon$ 中推出来.1962 年潘承洞与 1963 年巴尔巴恩独立地证明了(33)对于 $\delta=3/8-\varepsilon$ 成立,

从而不需复杂的计算即能导出（1，4）．1965年运用 $\delta=3/8-\varepsilon$ 及复杂的计算，布赫夕塔布证明了（1，3）．同时，庞比尼与阿·依·维诺格拉朵夫独立地证明了（33）对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立并由此简单地推出（1，3），公式（33），其中 $\delta=1/2-\varepsilon$，称为庞比尼—维诺格拉朵夫中值定理．进而言之，庞比尼建立了下述重要公式

$$\sum_{k\leqslant x^{1/2}/(\log x)^{c_2}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(k)}\right|$$

$$=O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right),\tag{34}$$

其中 c_1 为任何给定常数，c_2 为依赖于 c_1 的常数．尽管庞比尼公式比具有 $\delta=1/2-\varepsilon$ 的（33）式强了一点，但它在数论中却有很多重要应用，例如（34）可以用来代替霍勒（Hooley）证明的下述重要定理中用到的（GRH）．命 N（n）表示 $n=p+u^2+v^2$ 的表示个数，则

$$N(n)\sim\frac{\pi n}{\log n}\prod_{p\geqslant 3}\left(1+\frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{\substack{p=1(\bmod 4)\\ p\mid n}}$$

$$\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}\prod_{\substack{p=3(\bmod 4)\\ p\mid n}}\frac{p^2-1}{p^2-p-1},\tag{35}$$

此处 χ（n）为 mod4 的非主特征．

注记：哈代与李特伍德曾用他们的圆法给出了猜想（35），但即使假定（GRH），他们亦未能证明（35）．1957年，霍勒〔1〕首先在（GRH）之下给了（35）一个简洁的证明．然后于1960年，林尼克用他复杂的离差方法，完全证明了（35），即不附有任何假定的证明．庞比尼文章的另一优点是他对（34）的证明是富于创造性及简明的．（34）的进一步简化证明则是茄勒革尔给出来的．

1966年，陈景润给予加权筛法以重要的改进，从而证明了（1，2），这一结果被称为陈氏定理，即每一大偶数都是一个素数及

一个不超过两个素数的乘积之和. 命

$$M - N - \Omega + O\ (n^{9/10}), \tag{36}$$

此处

$$N - F\ (n,\ n^{\frac{1}{10}}) \quad \frac{1}{2} \sum_{n^{\frac{1}{10}} < p < n^{\frac{1}{3}}} F\ (n,\ p,\ n^{\frac{1}{10}}),$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p > n\ n \\ (p_{1,2})}} \sum_{\substack{p = p_1 p_2 p_3 \\ p_3 \leqslant n / p_1 p_2}},$$

其中 $2 | n$, $A = \{n - p,\ p < n\}$ 及 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < n^{1/3} \leqslant p_2 \leqslant \left(\frac{n}{p_1}\right)^{1/2}$, 则当 n 充分大时, 由 M 的正的下界估计即推出 (1, 2). 事实上, $M > 0$ 表示存在一个素数 p 使 $n - p$ 在区间 $[n^{1/10},\ n^{1/3}]$ 中最多只有一个素因子及最多只有一个素因子 $> n^{1/3}$, 或 $n - p$ 仅含 $> n^{1/3}$ 的素因子. (36) 右端的 N 由孔恩不等式给出, 这里需选取适当的参变数 (见王元), 它可以由布朗、赛尔贝格与布赫夕塔布方法结合庞比尼 - 维诺格拉朵夫公式加以估计, 陈景润的天才想法是引进 Ω, 并给它一个非寻常的估计. 以后, 所有关于陈氏定理的简化证明皆在于简化 Ω 的估计, 特别是, 潘承洞、丁夏畦与王元指出 Ω 的估计可以立刻由下面类似于 (34) 的中值公式推出:

命 $2 \leqslant y \leqslant x$ 及 $\pi(y, a, q, h) = \sum\limits_{\substack{ap \leqslant y \\ ap \equiv h \pmod q}} 1$, 则

$$\sum_{q \leqslant x^{1/2}/(\log x)^{c_2}} \max_{y \leqslant x} \max_{(h, q) = 1} \left| \sum_{c_3 < a \leqslant c_4} f(a) \left[\pi(y, a, q, h) - \frac{li\,\frac{y}{a}}{\varphi(q)} \right] \right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right) \tag{37}$$

对于适合 $(\log y)^{c_2} < c_3 \leqslant c_4 < y^{1-\varepsilon}$ 的 c_3, c_4 一致成立, 此处 $|f\ (a)| \leqslant 1$, $c_2 = c_1 + 7$ 及隐含于 O 中的常数依赖于 ε 与 c_1. 进而言之, 潘承洞与丁夏畦建立了一个包有 (34) 与 (37) 的中值

公式.

3. 密率.

命 A 表示一个互不相同的非负整数集合，其元素记为 a. 命 $A(n)=\sum_{1\leqslant a\leqslant n}1$，进而言之，命 $\alpha=\inf_{n\leqslant 1}\frac{A(n)}{n}$，这称为 A 的史尼尔曼密率. 显然有 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，而 $\alpha=1$ 即表示 A 含有所有自然数. 类似地，我们可以定义 B，b，$B(n)$，β 及 C，c，$C(n)$，γ. 具有形式 $a+b$ $(a\in A,\ b\in B)$ 的所有互不相同的整数集记之为 $C=A+B$，我们定义 $2A=A+A$ 及 $sA=A+(s-1)A$ $(s\geqslant 2)$. 史尼尔曼证明了两个简单但很重要的定理，即 (i) 若 $0\in A$ 及 $1\in B$，则 $\gamma\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$ 及 (ii) 若 $0\in A$，$1\in B$，及 $\alpha+\beta\geqslant 1$，则 $\gamma=1$，换言之，集合 C 含有全体自然数. 由 (i) 可知，若 $\alpha>0$，则存在整数 s_0 使 s_0A 的密率 $\geqslant 1/2$，从而由 (ii) 可知 $2s_0A$ 含有全体自然数，故得 (iii) 若 $0\in A$ 及 $\alpha>0$，则每一个正整数皆可以表为 $2s_0$ 个 A 的元素之和. 命 A^* 表示一个非负整数的集合，其中元素是允许重复的. 命 A 表示 A^* 中所有互异元素之集合及 $r(a)$ 表示 a 在 A^* 中重复的次数，则由薛瓦尔茨 (Schwarz) 不等式得

$$\Big(\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r(a)\Big)^2\leqslant\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r(a)^2\sum_{1\leqslant a\leqslant n}1$$
$$=A(n)\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r(a)^2.$$

所以

$$\text{(iv)}\quad \alpha\geqslant\Big(\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r(a)\Big)^2\Big/n\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r(a)^2.$$

史尼尔曼的密率概念确实简单，但却很有用. 命 $r(a)$ 表示 $a=p_1+p_2$ 的表示法个数，则由布朗方法可得

$$r(a)\leqslant\frac{ca}{(\log n)^2}\sum_{k\mid a}\frac{\mu(k)^2}{k}.$$

取 A^* 为包有 0，1 及所有形为 $a = p_1 + p_2$ 的数的集合，则由 (iv) 可知 A 有正密率，因此由 (iii) 得著名的史尼尔曼—哥德巴赫定理，即存在常数 c，使每个大于 1 的整数都是不超过 c 个素数之和.

命 s 表示最小的整数使每个大整数都是不超过 c 个素数之和，则由史尼尔曼原来的方法可得 $s \leqslant 800\ 000$，由于史尼尔曼密率及布朗方法方面的结果的进一步改进，特别是辛钦 (Khintchine) 于 1932 年证明了，若 $A = B$，则 $\gamma \geqslant \min(1, 2\alpha)$. 蒙恩 (Mann) 在 1942 年证明了著名的 $\alpha + \beta$ 猜想，即 $\gamma \geqslant \min(1, \alpha + \beta)$，及赛尔贝格发表了他的新筛法，所以 s 的估计亦有相应改进. 例如，$s \leqslant 2\ 208$ (罗曼诺夫 (Rcmancv), 1935)，$s \leqslant 71$ (海尔布朗，兰岛与西尔克 (Scherk), 1936 [1])，$s \leqslant 67$ (黎切 (Ricci), 1936) 等等，最佳结果 $s \leqslant 6$ 是沃恩得到的，无论如何，其精密度仍低于由三个素数定理推出的 $s \leqslant 4$. 用史尼尔曼方法还可以估计 S 的上界，此处 S 表示每一个 >1 的整数皆可以表为不超过 S 个素数之和.

尽管三个素数定理与 (1, 2) 较之 (1, 1) 仅一步之差，似乎用目前方法的改进是不可能证明猜想 (A) (或 (1, 1))，甚至在 (GRH) 之下或假定 (33) 对于 $\delta = 1 - \epsilon$ 成立，即

$$\sum_{k < x^{1-\epsilon}} \max_{(h,k)=1} \left| \pi(x, k, h) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^C} \right),$$

这一公式通常被称为哈贝斯坦 (Halberstam) 猜想，我们还不能条件地证明 (1, 1)，因此至今仍有很多人相信哈代演讲中所说的猜想 (A) 的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”，无论过去或现在都是对的. 因此我们深信对于进一步研究猜想 (A)，必须有一个全新的思想.

谈谈“哥德巴赫”问题*

一 前 言

在这篇短文里，我们向读者介绍一个著名的数论问题，即所谓“哥德巴赫（Гольдбах）”问题. 为了避免引用较高深的数学工具，我们除了谈谈这一问题的发展历史及其成果外，只是十分简单地谈一下各种处理方法. 其实本文所写的东西在有关的数论书籍中都有记载，作者只是加以整理与归纳，以便于读者更容易地了解这一问题. 至于欲详细了解这方面工作的读者，请参看华罗庚的著作〔1〕.

哥德巴赫问题是在 1742 年哥德巴赫写信给欧拉（Euler）时提出来的. 在信中，他提出了关于将整数表为“素数”① 之和的猜想. 这个猜想可以用略为修改了的语言叙述为：

（A）每一个$\geqslant 6$ 的偶数都是两个奇素数之和.

（B）每一个$\geqslant 9$ 的奇数都是三个奇素数之和.

显然命题（B）是命题（A）的推论. 盖若命题（A）真实，又设 $N\geqslant 9$ 为奇数，则 $N-3\geqslant 6$ 为偶数. 由（A）可知有奇素数 p_1，

---

* 原载《数学通报》，1，1964，36～39，本文发表后，哥德巴赫问题又有了不少进展，请参看作者以后的文章

① 素数（或称质数）是除 1 与自身之外，没有其他因子的大于 1 的整数、例如 2，3，5，7，…等等. 今后常用 p，p_1，p_2，…来表示素数. 素数以外的正整数称为复合数.

p_2使 $N-3=p_1+p_2$，所以 $N=3+p_1+p_2$. 因此命题（B）成立.

从哥德巴赫写信起到今天，已经积累了不少宝贵的数值资料. 例如皮平（N.Pipping）核对过，命题（A）当 $N\leqslant 10^5$ 时是正确的. 但是迄今还不能证明这两个命题的真伪.

在五十余年前召开的第五届国际数学会上，朗道（E.Landau）曾经说过，即使要证明如下较弱的命题（C），也是现代数学家所力不能及的.

（C）存在一个正整数 c，使每个≥2 的正整数都可以表为不超过 c 个素数之和.

首先是希尼莱曼（Л.Г.Шнирельман）在 1930 年（哥德巴赫提出猜想后的 188 年）证明了 c 的存在性. 换言之，他完全解决了命题（C）. 希尼莱曼在他的论文中，引入了关于自然数集合非常重要的概念——“正密率”，并运用“筛法”的成果，从而证明了命题（C）.

哈代（G.H.Hardy）与李特伍德（J.E.Littlewood）在这一世纪的 20 年代，系统地开创与发展了堆垒数论① 中的一个崭新的解析方法. 这个方法就是举世闻名的“圆法”. 他们在广义黎曼（Riemann）猜想② 成立的假定下证明了命题（B）当奇数 N 充分大时成立.

为了取消在证明中所用到的未经证明的猜想，我们需要估计某种类型的“指数和”（或称之为“三角和”）. 因此，获得指数和的

---

① 堆垒数论是研究将整数表成某种类型的数之和的分支. 例如，熟知任一正整数都是四个整数的平方和，九个立方和等等. 特别研究将整数表为与素数有关的数之和的分支，常常称为堆垒素数论. 例如哥德巴赫问题就属于这一分支.

② 广义黎曼猜想是迄今还不能证明的一个函数论的猜想. 素数论中一系列重大问题的完满解决往往都归结为这一猜想的解决. 在此不详谈了.

精确估计，就成了圆法的最主要环节了．在近二十年来，维诺格拉多夫（И.М.Виноградов）创造了一系列估计指数和的重要方法．特别，他在 1937 年成功地给出某种以素数为变数的指数和以精致的估计，从而他证明了命题（B）对于充分大的奇数是正确的．巴雷德金（К.Г.Бороздкий）计算过，当奇数 $n \geqslant e^{e}$[illegible]时，即能表成三个素数之和．

沿用哈代与李特伍德原来的方法，即不用指数和的估计，而用函数论的方法，林尼克（Ю.В.Линник）在 1946 年亦证明了同样的结果．

我国著名的数学家华罗庚在 1938 年证明了，命题（A）对于“几乎所有”的偶数皆成立．详细言之，命 $M(x)$ 表示不超过 x，而又不能表示成为两个素数之和的偶数的个数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0$．换言之，使命题（A）成立的偶数的“出现概率”为 1．

另外一个研究哥德巴赫问题的方法就是筛法．筛法是埃拉托色尼氏（Eratosthenes）首创的．仆朗（V.Brun）与赛尔贝尔格（A.Selberg）曾先后分别对这个方法作出过重要的改进．用筛法处理这一问题，须首先将命题（A）换一个提法，即将命题（A）中的素数都换成“殆素数”[①]．仆朗首先在 1920 年证明了，每一充分大的偶数都是两个素因子个数各不超过 9 的殆素数之和．现在我们已经可以将 9 分别改进为 2 与 3．

关于表偶数为一个素数及一个殆素数之和的问题．首先是爱斯特曼（T.Estermann）在广义黎曼猜想成立的假定下，运用筛法证明了每一充分大的偶数都是一个素数及一个素因子个数不超过 6 的殆素数之和．为了取消这一未经证明的猜想，林尼克作出了一系列

① 所谓殆素数，即素因子（相同的或相异的）的个数不超过某一固定常数的整数．

重要的贡献，特别是他首创的"大筛法"．瑞尼（A.Réuyi）在1948年证明了每一充分大的偶数都可以表为一个素数及一个素数因子个数不超过常数 R 的殆素数之和．现在已经可以确定 $R\leqslant 4$．

在堆垒素数论中，还有比哥德巴赫问题更广的问题．特别是华林（Waring）—哥德巴赫问题．这方面卓越的成果是华罗庚得到的，建议读者去看他的著作〔2〕．

二 密率方法

现在介绍一下正密率的概念．命 A 表示由一些互不相同的非负整数 a 所成的集合．命 $A(n)$ 表示 A 中不大于 n 的正整数的个数，即 $A(n)=\sum\limits_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ a\in A}}1$．在此需注意0并不计算在内．若 $\alpha>0$ 为对一切 n，$A(n)\geqslant\alpha_n$ 都成立的最大正数，则集合 A 称为具有正密率 α．否则称 A 的密率为零．显然有 $\alpha\leqslant 1$．若 $\alpha=1$，则 A 包有全体自然数．

例如，全体奇数的密率等于 $\frac{1}{2}$，全体偶数的密率为零．

如果有两个非负整数集合 A 与 B，则形如 $a+b(a\in A,b\in B)$ 的整数所成的集合 C 称为 A 与 B 的和集．记为 $C=A+B$，特别，记 $2A=A+A$，运用归纳法，可以定义 $kA=A+(k-1)A$．

命题（C）的证法可以简单地描述如下：

(i) 关于正密率，希尼莱曼证明了这样的结果：若非负整数集合 A 具有正密率 α，且 $0\in A$，则存在仅与 α 有关的常数 k，使 kA 的密率为1，换言之，kA 即全体非负整数．

(ii) 命 A 表示由0，1及全体形如 $a=p_1+p_2$ 的整数所成的集合．借助于仆朗筛法，希尼莱曼证明了 A 具有正密率 α，从而由(i)可知，kA 即全体非负整数．这就是说任何正整数皆可以表为 k 个 A 中的元素之和．命整数 $m>2$，则

$$m = 2 + (m-2) = 2 + b + p_1 + \cdots + p_t,$$

其中 $t \leqslant 2k \quad b$，$b \geqslant 0$．显然 $2+b$ 可以表为不超过 $b+1$ 个素数之和，所以 m 可以表为不超过 $c = 2k+1$ 个素数之和．故命题（C）成立，即得

定理 1 任何≥2的整数皆可以表为不超过 c 个素数之和，此处 c 为一个常数．

命 s 表示最小的正整数，使每一充分大的整数都可以表为不超过 s 个素数之和．常常称 s 为希尼莱曼常数．在维诺格拉朵夫的结果问世之前[①]，估计 s 是很有趣的．希尼莱曼的方法不仅能够得到 s 的存在性，而且可以得到 s 的明确上界．他的方法给出 $s \leqslant 800\,000$．其后罗曼诺夫(Н.П.Романов)得到了 $s \leqslant 2208$(1935)，沿这一方向，还有哈尔仆朗(H.Heilbronn)，朗道与希尔克(P.Scherk)的 $s \leqslant 71$(1936)及立奇(G.Ricci)的 $s \leqslant 67$(1937)．

s 的改进，主要依靠筛法技巧的改良．在赛尔贝尔格筛法问世后，运用希尼莱曼方法，s 还有进一步的降低．例如夏皮罗(H.N.Shapiro)与瓦尔加(J.Warga)得到 $s \leqslant 20$（1950）及尹文霖得到 $s \leqslant 18$（1956）．附带说一句，运用 1940 年发表的布赫夕塔布（А.А.Бухштаб）及塔尔塔可夫斯基（В.А.Тартаковский）对仆朗方法的改进，我们也可以得到比 $s \leqslant 67$ 强的结果．

必须指出，用希尼莱曼方法来估计 s，一切证明过程都是初等的，即不运用复变函数论或与它同样深度的数学工具．而维诺格拉朵夫定理的证明中，却用到了较高深的数学工具．

密率方法是广有用途的，用这一方法可以得到不少堆垒数论的有趣结果，而且密率论也有其自身的趣味，现在已经渐渐发展成为一个独立的分支了．在此我们就不详谈了．

---

① 读者不难看出，由维诺格拉朵夫的结果可以得到 $s \leqslant 4$．

三 圆 法

命 n 为整数，读者易证

$$\int_0^1 e^{2\pi i n\alpha}d\alpha=\begin{cases}1, & 当\ n=0;\\ 0, & 当\ n\neq 0.\end{cases} \tag{1}$$

借助于这一关系式，方程

$$N=p_1+p_2+p_3 \quad (其中\ N\ 为给定奇数，p_1,\ p_2,\ p_3\ 为素数变元) \tag{2}$$

的解答 $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ 的组数 $r(N)$ 可以表示成为积分

$$r(N)=\int_0^1\Big(\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i N\alpha}d\alpha. \tag{3}$$

(3) 式的证明如下：将 (3) 的右端展开即得

$$\int_0^1\Big(\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

$$=\sum_{p_1\leqslant N}\sum_{p_2\leqslant N}\sum_{p_3\leqslant N}\int_0^1 e^{2\pi i(p_1+p_2+p_3-N)\alpha}d\alpha.$$

由 (1) 可知

$$\int_0^1 e^{2\pi i(p_1+p_2+p_3-N)\alpha}d\alpha=\begin{cases}1, & 若\ p_1+p_2+p_3=N;\\ 0, & 若\ p_1+p_2+p_3\neq N.\end{cases}$$

故得 (3) 式.

因此只要能够证明，当 N 充分大时有

$$r(N)>0,$$

即得维诺格拉朵夫的结果. 维诺格拉朵夫定理的证法可以简单描述如下：

(i) 由于 $e^{2\pi i n\alpha}$ 是 α 的有周期 1 的函数，所以将上面所有公式中的积分区间 [0, 1] 换为任意长度为 1 的区间 $[\beta,\ \beta+1]$ 都是可以的. 命 $\tau=\dfrac{N}{\log^h N}$ (其中 $h\geqslant 20$ 为常数). 当 $(a,\ q)=1$[①] 及

① $(x,\ y)$ 表示 x 与 y 的最大公约.

$1 \leqslant q \leqslant (\log N)^h$ 时，命 $\mathfrak{m}_{a,q}$ 表示区间：

$$\mathfrak{m}_{a,q}:\ \left[\frac{a}{q}-\frac{1}{\tau},\ \frac{a}{q}+\frac{1}{\tau}\right].$$

可以证明当 N 充分大时，诸区间 $\mathfrak{m}_{a,q}$ 是互不重迭的．诸 $\mathfrak{m}_{a,q}$ 之和集记为 $\mathfrak{m}$，称为“优弧”．在区间 $\left[-\frac{1}{\tau},\ 1-\frac{1}{\tau}\right]$ 中去掉 $\mathfrak{m}$ 后剩下的部分，记为 m，称作“劣弧”．因此

$$\begin{aligned} r(N) &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha = \\ &= \int_{\mathfrak{m}} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha + \\ &\quad + \int_{m} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha.\text{①} \end{aligned} \tag{4}$$

(ii) 运用素数分布理论可以证明，当 N 充分大时有

$$\int_{\mathfrak{m}} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha > \frac{3}{\pi^2}\cdot\frac{N^2}{\log^3 N}. \tag{5}$$

应该指出，克服这一部分困难的功绩基本上应归功于佩吉(A. Page)与济戈尔(C. L. Siegel)．

(iii) 维诺格拉朵夫得到了如下的指数和估计：当 $\alpha \in m$ 时，

$$\Big|\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big| \leqslant c_1 \frac{N}{\log^5 N}\ \text{(其中 } c_1 \text{ 是一个常数)}.$$

又命 $\pi(N)$ 表示不超过 N 的素数的个数，则

$$\pi(N) < N.$$

因此

$$\begin{aligned} \Big|\int_{m} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha\Big| &\leqslant \int_{m} \Big|\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big|^3 d\alpha \\ \leqslant c_1 \frac{N}{\log^5 N}\int_{m} \Big|\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big|^2 d\alpha \end{aligned}$$

① $\int_{\mathfrak{m}}$ 与 $\int_{m}$ 分别表示在优弧与劣弧上的积分．

$$< c_1 \frac{N}{\log^5 N} \int_0^1 \left| \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p} \right|^2 d\alpha$$

$$= c_1 \frac{N}{\log^5 N} \pi(N) < c_1 \frac{N^2}{\log^6 N}.$$

(iv)由(4),(5),(6)即得:当 N 充分大时有

$$r(N) > 0.$$

换言之,我们得到

定理 2 每一充分大的奇数都可以表成三个素数之和.

在此我们还应该提到爱斯特曼的两个结果,这是他在维诺格拉朵夫定理问世之前得到的.他在 1937 年发表了:

a) 每一充分大的奇数都能表成 $p_1 + p_2 + p_3 p_4$.

b) 每个充分大的整数都是两个素数及一个平方数之和.

运用圆法,林尼克证明了,存在常数 c 使每一偶数 $N \geqslant 4$ 都能表成

$$2N = p_1 + p_2 + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_s} \text{ (其中 } s \leqslant c\text{)}.$$

圆法是广有用途的,堆垒数论中不少著名问题的最精密的结果都是用这一方法获得的.指数和的估计更是十分重要的,除堆垒数论外,它在数论的其他分支中亦有着卓越的应用,例如解析数论与几何数论等.此外,在理论物理、概率论与计算数学的某些问题上,也有过成功的应用.在此就不细谈了.

但需指出,用圆法来处理命题 (A) 是十分困难的.盖因将偶数 N 表为两素数和的表法$r'(N)$为

$$r'(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p} \Big)^2 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

同样可以将上面的积分区间分成优弧与劣弧,则可以证明

$$\left| \int_{\mathfrak{m}} \Big(\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p} \Big)^2 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha \right| \leqslant c_2 \frac{N}{\log^2 N} \log\log N.$$

但另一方面,作为应该忽略不计的劣弧上的积分,目前只能得到如下

的估计：

$$\left|\int_{m}\left(\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}\right)^{2}e^{-2\pi iN\alpha}\mathrm{d}\alpha\right|\leqslant c_{3}\frac{N}{\log N}.$$

因此，看来困难是十分巨大的.

关于维诺格拉朵夫定理的推广，吴方与潘承洞做过一些工作.

四 筛　法

筛法最初是用来寻找不超过 N 的全体素数的. 笔者曾为本刊撰写过一篇文章（谈谈“筛法”，1，1958），简单地介绍了筛法的概念. 现在只来谈谈筛法是怎样与哥德巴赫问题联系起来的.

命 $N\geqslant 4$ 为一个偶数，$a\geqslant 2$ 为整数及 $P_a=p_1\cdots p_r$，此处

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_r\leqslant N^{\frac{1}{a}}$$

为不超过 $N^{\frac{1}{a}}$ 的全体素数. 又命

$$P(N,N^{\frac{1}{a}})=\sum_{\substack{2\leqslant n\leqslant N-2\\(n(N-n),P_a)=1}}1,\tag{1}$$

此处右端表示对满足条件 $2\leqslant n\leqslant N-2$ 及 $(n(N-n),P_a)=1$ 的整数 n 求和.

倘若能证明

$$P(N,N^{\frac{1}{2}})>0,\tag{2}$$

则命题(A)成立.

由于(2)式成立的意义为存在 n 满足 $2\leqslant n\leqslant N-2$ 及 $(n(N-n),P_2)=1$，故 n 与 $N-n$ 必皆为素数. 倘若不然，假定 n 的素因子个数 $\geqslant 2$，因为小于 $\sqrt{N}$ 的素数都不能整除 n，所以 n 的素因子皆大于 $\sqrt{N}$. 因此 $n>N$，矛盾，故 n 为素数. 同法可知 $N-n$ 亦为素数. 由于

$$N=n+(N-n),$$

故得命题(A).

同法可证，若

$$P(N, N^{\frac{1}{a}})>0,$$

则 $N=n+(N-n)$，此处 n 与 $N-n$ 皆为素因子个数各不超过 $a-1$ 的殆素数.

因此，问题归纳为如何估计和(1)的下界了.首先是仆朗，他本质地改进了古典筛法，从而证明了，当 N 充分大时有

$$p(N, N^{\frac{1}{10}})>0.$$

换言之，他证明了

定理 3 每一个充分大的偶数皆为两个素因子个数各不超过9的殆素数之和.

为叙述简单，我们将下面的命题记为（a，b）：

每一充分大的偶数皆为一个不超过 a 个素数的乘积及一个不超过 b 个素数的乘积之和.

在仆朗之后，无论在估计和（1）方面，及其用于哥德巴赫问题方面，都有不断的改进．特别应该指出的是在 1947 年，赛尔贝尔格发表了本质上不同于仆朗的估计和（1）的方法．对于已知的各种情形，都可以用它来改进以往用仆朗方法得到的结果．关于定理 3 的进展历史如下：拉代玛黑尔（H.Rademacher）得到（7，7）(1924)，爱斯特曼得到（6，6）(1932)，立奇得到（5，7），（4，9），（3，15）及（2，366）（1937），布赫夕塔布得到（5，5）(1938) 及（4，4）(1940)，孔恩（P.Kuhn）得到（a，b），此处 $a+b\leqslant 6$（1954）．笔者得到（3，4）（1956），还与维诺格拉朵夫（А.И.Виноградов）分别独立地得到(3,3)(1957)，笔者同时还得到(a,b)，其中 $a+b\leqslant 5$.最后笔者证明了(2,3)(1957).

关于表充分大的偶数为素数及殆素数之和的问题，需要估计与

(1) 相应的和

$$\widetilde{P}(N, N^{\frac{1}{a}}) = \sum_{\substack{2 \leqslant p \leqslant N-2 \\ (N-p, P_a)=1}} 1, \tag{4}$$

此处右端对满足 $2 \leqslant p \leqslant N-2$ 及 $(N-p, P_a)=1$ 的素数 p 求和.

若能证明

$$\widetilde{P}(N, N^{\frac{1}{a}}) > 0,$$

则 $N = p + (N-p)$, 此处 $N-p$ 为不超过 $a-1$ 个素数的乘积. 特别当 $a=2$ 时, 则得命题(A).

首先是瑞尼证明了存在常数 R 使

$$\widetilde{P}(N, N^{\frac{1}{R}}) > 0,$$

换言之, 他证明了

定理 4 每一个充分大的偶数皆为一个素数及一个素因子个数不超过常数 R 的殆素数之和.

如果用瑞尼原来的方法来计算, R 将是很大的. 巴尔巴恩 (М.Б.Барбан), 潘承洞, 勒费 (Б.В.Левин) 与笔者作了改进, 得到 $R \leqslant 4$ (1962). 在广义黎曼猜想成立的假定之下, 笔者曾证明了 $R \leqslant 3$ (1957).

素数论中一系列困难的问题, 只要将素数换成殆素数的提法, 往往就能用筛法来处理. 目前殆素数论已经逐渐成为一个独立的分支了. 筛法在数论的其他分支中也日益产生重要的应用. 至于筛法这一概念, 在其他数学分支中, 特别在概率论中亦是颇有用途的.

五 后 语

在本文结束之际, 不难看出, 事物之间是彼此有联系的. 哥德巴赫问题虽然是离散的整数间的一条规律, 但是现有的一切结果, 都是在近代数学成就的基础上, 通过十分迂回的道路而得到的. 特

别，有时把这一问题化为一个连续性的提法，深刻地运用了连续性的数学工具，才得到了结果．看来企图从整数的定义出发，用简单的算术方法来处理这一类问题，是不易收效的．因此笔者认为，有兴趣于这类经典问题者，先熟悉一下已有的成果与方法，再作进一步的探讨，可能会有益的．

最后，限于作者的知识与认识水平，不当之处，敬请批评指教．

参考书

[1] 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963．
[2] 华罗庚，堆垒素数论，科学出版社，1957．

关于哥德巴赫猜想*

1，2，3，…这些简单的正整数，从日常生活以至尖端科学技术都是离不开的．其他的数字，如负数，有理数等等，则都是以正整数为基础定义出来的．所以研究正整数的规律非常重要．在数学中，研究数的规律，特别是研究整数的性质的数学，叫做“数论”．数论与几何学一样，是最古老的数学分支．

看起来似乎是十分简单的数字，却包含着许多有趣而深奥的学问．这里，先就本文涉及到的一些数学名词作一点解释．除了1以外，有些正整数除1与它自身外，不能被其他的正整数整除，这种数叫“素数”．最初的素数有2，3，5，7，11，…另外的正整数，就是除1与它自身外，还能被别的正整数除尽，这种数叫做“复合数”．最初的复合数有4，6，8，9，10，…所以正整数可以分为1，素数与复合数三类．凡能被2整除的正整数，叫“偶数”，如2，4，6，…其余的1，3，5，…叫“奇数”．

任何复合数都是可以唯一地分解成素数的乘积，这些素数就是复合数的素因子，例如$30=2\times3\times5$等等．所以素数在整数中是最基本的．素数性质的研究是数论中最古老与最基本的课题之一，早在欧几里德就已经证明了素数有无穷多个，但我们还没有判断任何一个正整数是素数还是复合数的切实可行的方法．借助于电子计算

---

* 原载《光明日报》，1978年8月18日．

机，我们迄今所知道的最大素数是 $2^{19937}-1$，共 6002 位. 又如我们可以证明 $2^{16384}+1$ 是一个复合数，但我们并不知道它的任何因子. 由此不难看出，我们能够证明与素数有关的命题是很少的.

在数论研究中，往往根据一些感性认识，小心地提出“猜想”，然后再通过严格的数学推导来论证它. 被证明了的猜想，就变成了“定理”，但也有不少猜想被否定了.

上面讲过，任何复合数都可以分解为素数的乘积，把复合数分解成素数之和的情况又如何呢？这里面是否有什么规律呢？

早在 1742 年，德国人哥德巴赫就写信给欧拉提出了两个猜想：(1) 任何一个大于 2 的偶数都是两个素数之和（表为“1 + 1”）；(2) 任何大于 5 的奇数都是 3 个素数之和。欧拉表示相信哥德巴赫的猜想是对的，但他不能加以证明. 容易证明 (2) 是 (1) 的推论，所以 (1) 是最基本的.

1900 年，德国数学家希伯尔特在国际数学会的演说中，把哥德巴赫猜想看成是以往遗留的最重要的问题之一，介绍给 20 世纪的数学家来解决，即所谓希伯尔特第八问题的一部分. 1912 年，德国数学家朗道在国际数学会的演说中说，即使要证明较弱的命题 (3)，存在一个正整数 a，使每一个大于 1 的整数都可以表为不超过 a 个素数之和”（注意：如果 (1) 成立，则取 $a=3$ 即可），也是现代数学家所力不能及的. 1921 年，英国数学家哈代在哥本哈根召开的数学会上说过，猜想 (1) 的困难程度是可以和任何没有解决的数学问题相比的.

近七十年来，哥德巴赫猜想吸引了世界上很多著名数学家的兴趣，并在证明上取得了很好的成绩. 此外，研究这一猜想的方法，不仅对数论有广泛的应用，而且也可以用到不少数学分支中去，推动了这些数学分支的发展.

下面我们谈谈关于哥德巴赫猜想的一些主要成果.

早在1922年，英国数学家哈代与李特伍德就提出一个研究哥德巴赫猜想的方法，即所谓“圆法”．1937年，原苏联数学家依·维诺格拉朵夫应用圆法，结合他创造的三角和估计方法，证明了每个充分大的奇数都是三个素数之和，从而基本上证明了哥德巴赫信中提出的猜想（2）．因此只剩下信中提出的猜想（1），这就是要证明命题（1+1）是正确的．

1920年，挪威数学家布朗改进了有二千多年历史的埃拉多染尼氏“筛法”，证明了每个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过9的正整数之和．我们将布朗的结果记为（9+9）．1930年，原苏联数学家史尼尔曼用他创造的整数“密率”结合布朗筛法证明了命题（3），并可以估计出 a 的值．但这一方法得到的结果不如前面讲过的三角和方法精密，我们就不叙述了．德国数学家拉代马哈在1924年证明了（7+7），英国数学家埃斯特曼于1932年证明了（6+6），原苏联数学家布赫夕塔布又于1938年与1940年分别证明了（5+5）与（4+4）．这就像运动员那样，不断地刷新着世界纪录．

我国数学家华罗庚早在30年代就开始研究这一问题，得到了很好的成果，他证明了对于“几乎所有”的偶数，猜想（1）都是对的．解放后不久，他就倡议并指导他的一些学生研究这一问题，取得了许多成果，获得国内外高度评价．1956年，笔者证明了（3+4），同一年，原苏联数学家阿·维诺格拉朵夫又证明了（3+3）．1957年，笔者证明了（2+3）．这些结果的缺点在于两个相加的数中还没有一个可以肯定为素数的．

早在1948年，匈牙利数学家瑞尼就证明了（1+b），这里 b 是一个常数．用他的方法定出的 b 将是很大的，所以并未有人具体定出 b 来．直到1962年，我国数学家潘承洞证明了（1+5），1963年，潘承洞，巴尔巴恩与笔者又都证明了（1+4）．1965年，

阿·维诺格拉朵夫、布赫夕塔布与意大利数学家朋比尼证明了 (1+3). 我国数学家陈景润在对筛法作了新的重要改进之后，终于在1966年证明了 (1+2)，取得了迄今世界上关于猜想 (1) 最好的成果. 他证明了，任何一个充分大的偶数，都可以表示成为两个数之和，其中一个是素数，另一个或为素数，或为两个素数的乘积. 陈景润的结果在世界数学界引起了强烈反响，为我国赢得了国际荣誉. 正因为陈氏定理重要，不少数学家致力于简化这个定理的证明. 目前世界上共有四个简化证明，最简单的是我国数学家丁夏畦，潘承洞与笔者共同得到的.

由上所述不难看出，哥德巴赫猜想也像其他经典问题一样，它的一切成就，都是在前人成就的基础上，通过迂回的道路而得到的. 数学是一门很严格的学问，现在有些同志，连数论的基础书都没有认真看过，就企图去证明 (1+1)，这不仅得不到结果，浪费了宝贵的时间，反而把一些错误的推导与概念，误认为正确的东西印在脑子里，它对于学习与提高都起着有害的作用. 我们要从中吸取有益的教训. 我们认为愿意搞这类经典问题的人，应先熟悉已有的成果与方法，再作进一步的探讨，才会是有益的. 既要有敢于创新的精神，更要有严谨的科学态度，这对于青年同志尤其重要. 当然，这里谈的是经典数学问题. 必须指出，在我国，应该有更多的人从事于研究更有直接应用价值的课题. 这个道理大家都是很明白的. 最后，让我们团结起来，为实现我国的数学事业全面赶超世界先进水平而奋斗吧.

评潘承洞、潘承彪著《哥德巴赫猜想》*

潘承洞、潘承彪的专著《哥德巴赫猜想》(科学出版社，纯粹数学与应用数学专著丛书，第7号，1981)出版以来，在国内外已有相当影响与高度评价(见[1，2]).

哥德巴赫猜想导源于哥德巴赫在1742年给欧拉的一封信，在这封信中，他提出了表整数为素数和的两个猜想，用略为修改的语言可以将它们表述为：

(A) 每一偶数≥6都是两个奇素数之和.

(B) 每一奇数≥9都是三个奇素数之和.

命题(B)是命题(A)的推论.

在1900年第二届国际数学大会上，希尔伯特在他的著名演讲中，首先阐明了寻找一个好的数学问题，作为数学研究的对象与源泉，对于推动数学的发展是何等重要！他特别列举费马猜想为例子，他指出“这样一个非常特殊，似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响．受费马问题的启发，库末尔引进了理想数，并发现了把一个分圆域的数分解为素理想因子的唯一分解定理，这定理今天已被戴德金与克隆尼克推广到任意代数数域，在近代数论中占着中心地位，其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域”(见[3])．为此，希尔伯特向20世纪的数学

---

* 原载《数学进展》，2，1987，207~210.

家提出了二十三个问题．历史的发展证明了这些问题的重要性．恰如上述，它们在相当程度上，推动了纯粹数学的发展，其根本意义在于伴随着这些问题研究的进展，一些重要的数学概念与强有力的并带有一般性的数学方法产生了．

到上世纪末，分析方法，特别是复变函数论用于数论，使数论产生了深刻的变化而进入一个新的阶段．解析数论趋于成熟并有相当深度，特别是素数分布理论方面的成就更为突出．例如车比雪夫证明了不超过 x 的素数个数$\pi(x)$ 的无穷大阶为$\frac{x}{\log x}$，狄里希勒证明了任何公差与首项互素的算术级数中含有无穷多素数，黎曼更指出了有关素数分布的一些问题与一个半纯函数 $\zeta(s)$ 的零点分布之间有着各种深刻的内在联系，此处 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $(s=\sigma+it,\ \sigma>1)$．当 $\sigma\leqslant 1$ 时，可以用解析延拓来定义 $\zeta(s)$．黎曼特别指出，$\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 上的零点皆位于直线 $\sigma=1/2$ 上．这个猜想已被愈来愈多的数学家认为是纯数学中最有挑战性的问题之一．除这个猜想外，黎曼的其他猜想均被阿达玛与冯·曼哥尔德证明了．从而阿达玛与德·拉·瓦里·普桑独立地证明了高斯与勒让德尔的猜想：$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$．这又称为“素数定律”，证明过程中，大量用到复变函数论，特别是整函数理论．

希尔伯特高瞻远瞩，预见到黎曼猜想的研究将导致数论，甚至数学的巨变．他也预见到素数变数不定方程的重要性．最简单的情况为两个素数变数的一次方程

$$ap+bq=c,$$

此处 a，b，c 为给定整数，要求 p，q 为素数的解．分别取 $a=b=1$ 及 $c=2n$，与 $a=1$，$b=-1$ 及 $c=2$，则得

$$2n=p+q \text{ 及 } 2=p-q.$$

对于任意 $n\geqslant 3$，前者皆有奇素数解 p，q 就是猜想 (A). 后者有无穷多组素数解答 (p, q) 就是孪生素数猜想，即存在无穷多对相差为 2 的孪生素数对. 这两个猜想是姐妹问题，她们与黎曼猜想一起构成了希尔伯特第八问题.

在 1912 年，第五届国际数学大会上，兰岛又将命题 (A) 与孪生素数猜想作为四个素数论中待解决的两个难题加以推荐（见 [4]）. 又在 1921 年哥本哈根数学会上，哈代在其演讲中宣称猜想 (A) 的“困难程度是可以和任何数学中未解决的问题相比拟的”（见 [5]）. 这么多大数学家瞩目哥德巴赫猜想，正是预见与期望这个问题作为推动数学发展的动力.

果然不出所料，在 19 世纪素数论伟大成就的基础上，从 1920 年开始，哥德巴赫猜想的研究有了重大突破. 伴随着这一问题本身成果的获得，一些新的数学概念与崭新的强有力的数学方法产生出来了，其意义远比这个问题本身的结果重要得多. 哈代与李特伍德的“圆法”与依·维诺格拉朵夫的素数变数的指数和估计方法就是研究哥德巴赫猜想的产物（推动这两个方法产生的另一个问题为希尔伯特异常重视的华林问题）. 这两个方法最终导致依·维诺格拉朵夫于 1937 年证明了“三素数定理”，即猜想 (B) 对于充分大的奇数成立. 命 (a, b) 表示命题：“每一充分大的偶数都是一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和”. 布朗在对古老的埃拉多染尼氏筛法作了重大改进后，首先用于猜想 (A)，并证明了 (9, 9). 这些强有力的数学方法的发展，不仅对数论，而且对不少数学分支都有重要应用.

早在 30 年代，华罗庚就证明了几乎所有的偶数，猜想 (A) 成立. 详言之，命不超过 x，使 (A) 不成立的偶数个数为 $E(x)$，则对于任何 $c>0$ 皆有 $E(x)=O(x/\log^c x)$. 50 年代初，在他主持数学研究所工作时，高瞻远瞩地预见到哥德巴赫猜想的可

能发展，亲自组织了这个问题的讨论班，由于他的坚强领导与富于见地的计划，使一系列重要的数论结果都出自中国数论学家之手（见［2］）．特别在筛法与猜想（A）方面的成就，得到国内外高度评价．早在50年代初，笔者就证明了（2，3），首次打破了布赫夕塔布保持的1940年的记录（4，4）．60年代初，潘承洞证明了（1，4），大大改进了瑞尼的著名结果（1，c），其中c是一个大常数．特别是陈景润在1966年，发表了（1，2），被国际上称为"陈氏定理"，并被认为是"筛法发展的顶峰"（见［6］）．看来，圆法与筛法均已山穷水尽，用它们几乎是不可能证明猜想（A）的．数学家殷切地期望新思想与新方法的产生．

处于这个时期，总结好以往的成就，使后来者能较快掌握以往的成就，少走弯路，继续前进，肯定是十分必要的．上述重要成就与方法，虽已散见于众多专著，但潘承洞与潘承彪的专著却是全面系统论述哥德巴赫猜想的第一本著作，其出版引起国内外数学界的注目是可想而知的．国外正期待着其英文版早日问世（见［1，2］）．

仅仅只用三百几十页篇幅，全面总结哥德巴赫猜想研究六十多年来的大量杰出成就，确是十分艰巨的事．两位作者出色地完成了写作任务．本书绝非材料的简单堆积，而是一个再创造的研究工作专著．本书是在假定读者已经了解初等数论与素数分布论的基础上撰写的．

本书第一、二章中，讲述了特征与高斯和后，即开门见山，引入朋比尼与罗斯关于列尼克与瑞尼的大筛法的重大改进的阐述．第三、四章讨论了ζ-函数与L-函数的性质，特别是它们的中值公式与零点分布性质．第五、六章即进入"圆法"与素数变数指数和的估计方法的讨论，从而证明了"三素数定理"．对于素数变数指数和的估计，书中讲述了初等方法与分析方法，其中最初等的分析

证明方法则是潘承彪给出的．书中对“三素数定理”给出了有效的与非有效的两种证明．所谓有效证明，即可以给出 n_0，当 $n>n_0$ 时，猜想（B）成立．第六章还包括了华罗庚关于猜想（B）的推广：任何充分大的奇数 N 均可表为$N=p_1+p_2+p_3^k$，此处 k 为任意给予正整数．第七章为赛尔贝格筛法，这里讲的是黎切尔特与朱尔开特的形式，即系数有明显表达式的精密筛法．第八章为关于算术级数素数定理重要的朋比尼—阿·维诺格拉朵夫中值公式．在不少素数论的问题中，这一公式可以用来代替未经证明的广义黎曼猜想．在本章中还讲了潘承洞等建立的一个新的中值公式，一方面这一公式包有朋比尼—阿维诺格拉朵夫公式，另一方面可以用这一公式来统一处理一系列重要的问题，其中包括下一章讲的陈景润的两条重要定理（见 [7]）．这个中值公式的想法是潘承洞提出的，他的出发点是下面的恒等式

$$
\begin{aligned}
-\frac{L'}{L} &= -\frac{L'}{L}(1-LG)-L'G \\
&= \left(-\frac{L'}{L}-F\right)(1-LG)-L'G+F-FLG.
\end{aligned}
$$

沃恩也独立地提出这个想法并加以发展．第九章为陈景润的两条著名定理，即“陈氏定理”与将偶数表示为两个素数之和的表法 $\leqslant 7.928c(N)\dfrac{N}{\log^2 N}$．恰如上述，书中基于“潘氏公式”给出了这两条定理的证明，比原来的证明有实质性的化简．第十章再一次深入讨论 L－函数的零点估计．第十一、十二两章，则研究哥德巴赫数（即使（A）成立的偶数），其中包括沃恩与蒙哥玛利关于$E(x)$的进一步改进：存在 $\epsilon>0$ 使 $E(x)=O(x^{1-\epsilon})$，陈景润与潘承洞首先给出 ϵ 的数值．作者还研究了小区间$[x,x+f(x)]$中哥德巴赫数的存在性问题，此处 $f(x)=O(x)$．作者讲了凯蒂的结果：在黎曼猜想之下，取$f(x)=O(\log x)^2$ 即可保证小区间中有哥德巴赫数．

在 ζ - 函数的密度猜想之下或不作任何猜想，潘承洞提出了统一处理哥德巴赫数的方法，它包有现有的重要结果．书中阐述了这个方法．

书的最前面有一个详细的导论，阐述问题的历史及方法概要，指引读者对哥德巴赫问题研究的全貌有所了解．书末有一个经挑选过的详细而有用的参考文献．恰如彼得·肖指出："书中每一章的材料都是很好地加以组织并具备一个好的导引，包有许多有价值的评述，指出真正困难所在及各种结果之间有启发性的内在联系．写作风格透彻并具启发性，诸定理的证明是秀美的．最近几年，在解析数论方面已出现了一系列很有影响的书（例如德文波特的"乘积数论"，蒙哥玛利的"乘积数论选论"与黎切尔特及哈贝斯坦的"筛法"）．这本书是这个文库的一个重要添加者．作为一个教程，本书不仅对中国初从事解析数论研究的数学家有重要影响，它的好的英文版本对西方世界亦具有同样的教益．"（见［2］）这决非溢美之词，两位作者是当之无愧的．

任何书都有一定的范围，本书未讨论史尼尔曼的整数"密率"概念，史尼尔曼结合他自己的密率及布朗筛法，于 1930 年证明了正整数＞1，都是不超过 c 个素数之和，其中 c 为常数．这是第一个堆垒素数论定理，具有重大的历史意义，但用这个方法是达不到"三素数定理"的深度的，现在不讨论是可以的．本书未论及哥德巴赫问题的推广，将这一猜想与华林问题结合起来可以研究方程

$$N = p_1^k + \cdots + p_s^k$$

的各种可解性问题，其中 p_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 为素数．还可以研究更为广泛的堆垒素数论问题．读者可以读华罗庚的优秀专著［8］．我们还可以在代数数域上建立类似的哥德巴赫猜想．三井孝美将"三素数定理"推广至任意代数数域（见［9］）．另外，有兴趣阅读与本书有关的各重要原始文献的读者，请参阅笔者编辑的书（见

[10]).

参考文献

[1] Kee Wai Lau, *Math*. *Rev*; 1984, h; 10064.

[2] P. Shiu, *Zent*, *für Math*; 4, 1984, 7, 10040

[3] 康斯坦西·瑞德，希尔伯特，上海科学技术出版社，1982.

[4] E Landau, Geloste und ungeloste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, *Proc* 5 − *th Intern Congs*、*Math*; *camb*; 1, 1912, 93～108.

[5] G H. Hardy, Golbrach's conjecture, *Math*、*Tid*; B, 1922, 1～16.

[6] H Halberstam and H. E Richert, Sieve Methods, Acad. Press, 1974.

[7] Pan cheng Dong (潘承洞), A new mean value theorem and its applications, "Receut progress in analytic number theory" I, Edilid by H. Halberstam and C. Hooley, Acad. press, 1981, 275～288.

[8] Hua Loo Keng (华罗庚), Additive theory of prime numbers, Trud. Inst. Mat, Steklov, 22, 1947

[9] T. Mitsui (三井孝美), On the Goldbach problem in an algebraic number field, Ⅰ. Ⅱ, *J*. *Math*. *Soc*. *Japan*, 1960, 290～372.

[10] Wang Yuan (王元), Goedbach conjecture, *World Sci*. *pub comp*; 1984.

附录：关于哥德巴赫猜想的报道

是正确认识哥德巴赫猜想的时候了*

《光明日报》记者　温红彦

说起哥德巴赫猜想，恐怕中国有相当一部分人熟悉这个词，并会把它同数学家陈景润、同“1 + 1”、同“皇冠上的明珠”联系起来.

自从1977年报告文学《哥德巴赫猜想》问世后，神州大地不知有多少人向往着摘取那颗灿烂的“明珠”. 十几年来，全国各地自称证明出哥德巴赫猜想的人数以千计，关于这种报道也时常见诸市井小报甚至一些大报名刊. 但最后证实这些全是谬误. 十几年来，光是中国科学院数学所就收到约100麻袋这样的论文，但没有一篇论文正确. 这种怪现象最近又有抬头之势.

是正确认识哥德巴赫猜想的时候了. 日前，中科院数学所特意邀请了北京十几家新闻单位，就此问题举行了记者招待会. 数学所所长杨乐主持，王元、潘承彪等7位数学家参加. 会上，著名数论专家王元教授介绍了什么是哥德巴赫猜想，为什么要研究它，研究的难度有多大，其他专家也都谈了自己的看法，以求同新闻界，同热衷于“猜想”的人们达成共识.

---

* 原载《人民日报》，1992年2月17日.

（一）

哥德巴赫猜想是数学中的一个古典难题，它可以表述为：凡大于等于4之偶数必为两个素数之和（“1+1”是它的简单表述，即一个素数加一个素数）．1742年，德国数学家哥德巴赫发现这个现象后，由于无法用严格的数学方法证明命题的正确性，故只能称之为猜想．他写信给当时瑞士大数学家欧拉，请他证明．欧拉一直到离开人世也没证出来，但他相信这个猜想是对的．从此，中外数学家们高擎火炬、辈辈相承地研究这个难题．

本世纪以来，研究有了突破性进展：1920年，挪威数学家布朗证明出“9+9”；1956年，原苏联数学家维诺格拉朵夫证明了“3+3”；1957年，我国数学家王元证明出“2+3”；1962年，我国数学家潘承洞证明了“1+4”．到1966年，我国数学家陈景润证明的“1+2”在世界数学界引起轰动．“陈氏定理”的内容是：充分大的偶数可表示为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和．这就是至今有关“猜想”证明的最好结果．

哥德巴赫猜想不是一个孤立的数学问题．当年华罗庚教授倡导并组织研究这个难题，是有深邃的战略眼光的，因为它是带动解析数论，最终带动数学向前发展的重要推动力．如果孤立地看待哥德巴赫猜想，或把它当做一个数学游戏，可以随便猜一猜，那就偏了．

目前看来，“1+1”这颗灿烂的“明珠”并非距我们“一步之遥”，而仍在遥远的“天边”，在用今天最先进的“宇航工具”都不易到达的地方．当代中外研究数论的专家终不能使“猜想”变为“定理”，实在不是由于他们不思努力、不想摘那“皇冠上的明珠”．数学理论有一个由粗到精的逻辑严密化过程，要靠长期的积累，有时会长达数十年，几百年，甚至上千年．曾与其兄潘承洞在数论方

面一起做出重大贡献的数学家、北大教授潘承彪感慨地说，搞数论研究的人谁不想摘取那颗“明珠”啊，但那只是一种理想，按目前国际数学界的理论发展水平，看来在相当时期内是难以达到的．王元教授编辑了《哥德巴赫猜想》一书，汇集了世界上最优秀的论文20篇．他在该书前言中写道：“可以确信，在哥德巴赫猜想的研究中，有待于将来出现一个全新的数学观念．”

这，已成为中国数学界同仁的共识．

（二）

这次记者招待会的举行，于科学家、于新闻界、于迷恋“猜想”的人们都是有益的．如果科学家们继续保持沉默，无异于让那些毫无学术价值的论证继续干扰科学家的研究，损坏新闻界的声誉，使更多的人走入歧途．

说那些论证毫无学术价值是有充分根据的．杨乐教授解释说：我们看过的宣称已证明出这一难题的全部来稿，没有一处可取．从严格意义上说，不少作者连中学数学都没学好．中学数学是2000多年前的成果，微积分的出现也离我们300多年了．200多年来，尤其是近几十年，数学各分支有了极大的发展，取得了极其丰富的成果．在这些成果和方法的基础上，大批中外数学家成年累月地努力尚未解决的难题，如果可以靠加加减减和微积分去解决，那么近几百年的数学发展不是等于零吗？大批数学家的努力不是等于零吗?！这些人的做法好比手持弓箭参与海湾战争、手持斧锯去造航天飞机．

科学家们还讲到一些令人哭笑不得的事．不久前，一位外地老同志退休后来到北京，跟潘承彪教授说他要搞哥德巴赫猜想．潘承彪劝他最好还是做点别的事，他却说“别的事不太好做”．青年数学家贾朝华说，许多人拿了论文来让他提意见找找错，一看文章，

找错几乎变成了“找对”，有的竟连一处对的地方都找不到．

杨乐教授最后说：我可以很负责任地告诉大家，这样的作者无论花多少时间，也绝对搞不出哥德巴赫猜想．如果有谁真的热爱这一“猜想”，首先要学好高等数学，认真钻研数论，掌握这个问题的重要文献，否则，就不要在这方面浪费自己的宝贵时间和有限的精力了．

这，也是目前中国数学界同仁的共识．

但愿它还能成为真正热爱数学的朋友们的共识．

话说哥德巴赫猜想*

本报记者　刘志达　吴雅丽

最近，我们陆续从读者来信和一些材料中看到，有人宣称自己“已经得到了世界著名数学难题——哥德巴赫猜想的完整证明”．我们怀着半信半疑的态度把有关材料寄给了著名数学家、学部委员王元教授，想征求一下他的意见．王教授很快回了电话：“这种类似的论文和信件我们已收到不下几十麻袋，都是错的，不知浪费了多少人的宝贵时间．我的意见早说过了，这种问题不是可以随便搞的．”

我们当即决定去数学所就此事进行采访．没想到，很多家新闻单位的记者也闻风而至，我们的采访便变成了一个记者招待会．杨乐、王元、潘承彪等许多著名数学家接待了我们．

王元首先介绍了什么是哥德巴赫猜想：一个大于等于 4 的偶数，它就可以写成两个素数之和．1742 年，德国数学家哥德巴赫

* 原载《光明日报》，1992 年 2 月 14 日．

对许多偶数进行了检验，都说明这是确实的，但因为尚未经过证明，只能称之为猜想．哥德巴赫猜想的简单表述即 1 + 1．我国数学家陈景润经过不懈努力，于 1966 年证明出“充分大的偶数都是一个素数加上一个不超过两个素数的乘积”，即所谓的 1 + 2．“充分大”到底有多大？用现在的方法是算不出来的，只知有那么个数存在就是了．

王元教授接着说，我们为什么要研究哥德巴赫猜想？因为它可以带动数学发展．华罗庚教授 50 年代提出这个选题时认为，通过对“猜想”的研究，可以推动解析数论的发展．事实上，解析数论中的两个重要方法——筛法和圆法，就是在哥德巴赫猜想的研究中发展和完善起来的．当时，国外只证明到 4 + 4，距离 1 + 1 还有很大距离，我们可以做出成绩．我国也确实因此造就了一批数学家，其中包括 3 名学部委员：王元、陈景润、潘承洞．今天，再研究这个问题，难度就大多了．在国外也有个别人还在研究这个猜想，但不像我国有如此多的人热衷于此，而这些热心者大多数没有多少数学基础，这是个怪现象．

曾经与其兄潘承洞一起在解析数论研究方面取得过重要成果的数学家潘承彪说，自从 1977 年徐迟关于陈景润的报告文学发表后，不知有多少人迷上了哥德巴赫猜想．这类稿子我看过很多，有时是当作政治任务来看的，但那些方法都是错的．不久前有位地方官员退休下来，也研究起哥德巴赫猜想，他拿了“论文”来让我看，我马上指出他的错处，并问他为什么搞这个难题，他说别的不好搞．我给了他一本王元先生编的介绍“猜想”的书，让他先去看看．结果他回去不久又给我寄来第二篇“论文”，说这回改对了，弄得我哭笑不得．数学是一门严肃的科学，是循序渐进的，你不知道前面的东西，就不可能证明后面的东西．

数学学报常务主编龙瑞麟研究员感慨更多，他说，徐迟的文章

出来后，我们每年收到大量关于哥德巴赫猜想的稿件，简直是“群众运动”，根本看不过来，因此，我们学报有个不成文的规定，一般不处理这方面的稿件．有些人声称他的方法可以引起数学界革命，而且相当一级的领导打了招呼，让我们看，结果没一篇对的．

中科院数学所所长、学部委员杨乐说，北京一共有5位解析数论专家，今天到了王元、潘承彪和我们所副研究员贾朝华3位，陈景润和另一位专家身体不好没有来．我们为什么这么重视这件事呢？因为就我们看到的这些稿件，我可以斩钉截铁地告诉大家：这样的作者绝对搞不出哥德巴赫猜想，因为他们的工具不行．如果一个人拿着一把锯子、刨子就想造出航天飞机，这能让人相信吗？所以有人拿着一摞稿子非让我看不可，我只用了一分钟，就告诉他，你是错的．他不高兴，以为我不负责任．其实我就是看了他用的什么工具，他只是用了加加减减、微积分，就等于用的是锯子、刨子．也许有人说自己的能力比陈景润强，这也不是不可能．但是在现代数学研究中，即使很普通的成果，也需要长期的努力学习，打下良好的基础，同时需要对所研究的领域和课题已有的成果、方法和最新文献有较好的掌握，还要在所研究的课题上下一番苦功夫．哥德巴赫问题，稍做解释任何人都能懂，但要在数学上予以证明，是极端困难的．中外数学家历时200多年尚未最终解决，现在业余爱好者纷纷上阵，好比说踢足球，国家队输了，成千上万的球迷痛心疾首，但还没一个人能说，你下来，我上去给你踢两脚．更何况数学训练比足球训练需要更长的时间和更多的非先天性因素．

话说到这里已经很明白了．我们问杨所长，陈景润对哥德巴赫猜想的研究是不是有什么新进展．他告诉我们，陈景润是一个优秀科学家，他搞的数论研究十分艰深，他得出的1+2成果非常辉煌．目前他患了帕金森氏症，很不好治．如果他有精力，他还会从事数论研究的．

31 岁的青年数学家贾朝华说，我也看过很多这类的稿子，有的命题都没搞清，牛头不对马嘴，有的甚至全文都挑不出对的地方.

杨乐说，这么说吧，谁能跑百米破 10 秒纪录，国家体委心里是有数的，那么数论方面谁可能取得突破性进展，我们数学界心中也是有数的，不会埋没人才．何况我们国家现在是开放的，如果有谁说埋没了自己，他可以把论文寄给国外数学杂志.

据我们所知，以上意见，不仅仅是这几位数学家的看法，而是数学界大多数人的看法．著名数学家陈景润在 1988 年出版的《初等数论》的前言中也说过这样的话："一些同志企图用初等数论的方法来解决哥德巴赫猜想及费尔马大定理等难题，我认为在目前几十年内是不可能的，所以希望青年同志们不要误人歧途，浪费自己的宝贵时间和精力."

著名数学家呼吁——

业余数学爱好者不要去钻哥德巴赫猜想等问题*

本报讯（记者满桂芳）日前，著名数学家王元、杨乐、潘承彪等发出呼吁："请业余数学爱好者们不要在解诸如哥德巴赫猜想等数学难题上下功夫，这会白白浪费他们宝贵的时间和精力."

自从 70 年代关于哥德巴赫猜想的报告文学发表后，引起了社会上许多人对这一问题的兴趣，他们之中的一些人不惜耗费大量的时间去钻研这些问题，仅中国科学院数学所这些年来接到有关宣称

* 原载《北京日报》，1992 年 2 月 17 日.

解开此类难题的稿件、论文就有近万件.

杨乐、王元等充分肯定了这些同志希望为国争光的精神，但是他们认为，要从数学上证明哥德巴赫猜想是极端困难的.这是一个古典难题，中外数学家经过两百多年的努力，尚未最终解决，现在的业余爱好者大多数想靠中学代数或者微积分来证明，这是绝对不可能的.

中学代数和微积分都是几百年前的东西，而近两百年，尤其是近几十年，数学发展迅速，有了二十多个二级学科.每个二级学科又形成了极其丰富的内容、成果、方法，运用这些最新的成果和方法，大批中外数学家成年累月地努力尚未解决哥德巴赫问题，试想，用三四百年前的工具，解决已发展到现在、有那么多工具还没解决的问题是可能的吗？这就像用锯、刨子等工具去造火箭一样，根本是不可能的.科学不能存有任何侥幸心理，这些著名数学家不希望那些同志在这个问题上浪费宝贵的时光.

当然，如果有人，特别是青年人立志从事数学研究，他们是非常欢迎的.他们告诫青年人，在现代数学研究上即使是作出很普通的成果，也需要经长期的努力学习，打下良好的专业基础，对所研究的领域和课题已有的成果、方法和最新文献有较好的掌握，在所研究的课题上下一番苦功夫，除此之外，是没有别的途径的.

证明“1+1”还需新手段
业余爱好者切莫入歧途*

本报讯（记者荣跃）在徐迟那篇著名的报告文学《哥德巴赫猜想》问世14年后，热心的读者们终于被浇上了一盆冷水.“陈景润

* 原载《中国青年报》，1992年2月17日.

从未去证明 1+1，甚至都没想过自己能证明 1+1.”刚卸任的中国数学会理事长、著名数论专家王元教授 2 月 13 日向新闻界宣布："目前，中国数论界没有一个人企图证明哥德巴赫猜想."

自从德国数学家哥德巴赫提出“一个大于等于 4 的偶数，可以写成两个素数之和”这一猜想（简单表述即“1+1”）后，国内外大批数学家经过 250 年的研究，终于确认，运用现有数学方法很难摘下这颗“数学皇冠上的明珠”，需要寻找新的、更先进的手段.

然而，近些年在中国却有成百上千名业余爱好者自称证明了“猜想”. 几十麻袋的“猜想”论文寄到中科院数学所、数学学报编辑部. “而且不少人纠缠得非常厉害.”数学所所长杨乐教授迫不得已召开这次新闻发布会来排除干扰.

“这些业余爱好者的来信来访，不仅影响了研究人员的正常工作，也严重损害了科学的声誉.”31 岁的数学所副研究员贾朝华颇有些感慨，“严格地说，他们大多数连中学数学都未学好，证明中大部分错误不超出中学常识范围.”

有人说："我们那么多人，万一证出来，怎么办?”杨乐斩钉截铁地回答："不论这些爱好者有多少人，花多少时间，都证明不了哥德巴赫猜想. 因为他们用的工具不行. 如果有人要蹬着自行车上月球，谁也不会相信. 所以，有人拿来一摞论文，我只看了一分钟就说，你是错的. 他以为我不负责任. 其实我就是看看他用的什么工具. 他用的只是初等代数、几何、微积分，这就等于用的是自行车，想登月球是不可能的."

杨乐指出："数学家出成果的最佳年龄是三十几岁，攻克数学难题需要优秀的青年数学家.”他谆谆告诫有志攻数学难题的青少年，选择正确的成才之路，至少具备三条：(1) 大学数学系的严格训练；(2) 掌握所研究领域的重要成果、方法、文献；(3) 在所研究课题上下一番苦功夫. 他说："遗憾的是，这一大批爱好者几乎

毫不例外地连条件（1）都不具备，怎么会取得成功呢？国内足球爱好者不下几千万，为什么没有一个宣称他踢得比马拉多纳还要好？这是最浅显的道理，何况数学训练比足球训练还需要更长的时间.”

杨乐代表中科院数学所宣布，今后，对这类命题的论文原则上不予受理，同时希望领导机关、新闻单位不要再转来此类信件．杨乐表示，他们绝无压制人才之意．他补充说：“国外有两百多家数学杂志，如果有人不相信，可以把论文寄去.”

数学家尚且无奈　业余者岂能称雄*

本报记者　李大庆

对相当多的中国人来说，哥德巴赫猜想一词并不陌生．20 年前，著名作家徐迟在《人民文学》1978 年第一期上，发表了报告文学《哥德巴赫猜想》．随后，《人民日报》、《光明日报》、《解放军报》等都予以转载．紧接着，全国许多家报纸和电台都转载和连播了这篇报告文学，大、中学教科书也纷纷收入此文．一时哥德巴赫猜想一词弥漫于千家万户，那个文弱书生陈景润成了家喻户晓的“明星”.

如今 20 年过去了，那个报告文学《哥德巴赫猜想》中的人物陈景润已于 1996 年 3 月 19 日撇下他钟爱的数学，撇下他的妻儿，骑鹤而去；《哥德巴赫猜想》一文的作者徐迟也撂下他那支“划过了几十年逝波”的笔，追随陈景润撒手人寰.

* 原载《科技日报》，1998 年 2 月 13 日．

研究仍无进展

20年前，徐迟的报告文学使不少中国人都知晓了陈景润是全世界离那颗数学皇冠上的明珠最近的一个人．以当时人们的感觉，这颗明珠仿佛已是陈景润的囊中之物，摘取它指日可待．然而20年过去了，中科院院士、数学所研究员王元在接受记者采访时说，到目前为止，哥德巴赫猜想没有什么新进展，还停留在陈景润的那个（1+2）的水平上．

哥德巴赫猜想是一个很神奇的数学问题，只要具备小学三年级的水平就能理解它．18世纪上半叶，德国数学家哥德巴赫发现每个不小于6的偶数都是两个素数之和．200多年来，就是这道连小学生都能理解的题却难倒了无数的数学家．

本世纪20年代，挪威数学家布朗用一种古老的数学方法"筛法"证明了每一个大偶数可分解为一个不超过9个素数之积与一个不超过9个素数之积的和（简称9+9）．从此，各国数学家纷纷采用筛法去研究哥德巴赫猜想．1924年德国数学家拉德马哈尔证明了（7+7）；1932年德国数学家爱斯台尔曼证明了（6+6）；1938年原苏联数学家布赫斯塔勃证明了（5+5），1940年他又证明了（4+4）；1956年原苏联数学家维诺格拉朵夫证明了（3+3）；1958年我国数学家王元证明了（2+3）；1962年潘承洞证明了（1+5）；同年潘承洞又证明了（1+4）；1965年布赫斯塔勃、维诺格拉朵夫和意大利数学家庞皮艾黎都证明了（1+3）；1966年5月，陈景润证明了（1+2）．在外行人看来，（1+2）与（1+1）仿佛只有一步之遥．但王元说，（1+2）与（1+1）的距离其实很远很远．陈景润是吸收了全世界关于哥德巴赫猜想60年的成果，再加上陈景润的天才创造才把哥德巴赫猜想推进到（1+2）的水平上．王元认为，使用目前的数学方法是不可能解决哥德巴赫猜想的．以他个人

的看法，估计几十年内哥德巴赫猜想不会有什么新进展.

备受业余爱好者青睐

20 年前，徐迟以他的报告文学《哥德巴赫猜想》一文“为中国的知识分子平了反”（王元语），为科学正了名，向人们吹响了进军科学的号角. 与此同时，也使哥德巴赫 200 多年前的猜想在中国不少数学爱好者的头脑中安家落户.

难以计数的中国人加入了证明这一猜想的行列.

王元先生说，《哥德巴赫猜想》发表后，他和陈景润不知到底收到了多少封讨论哥德巴赫猜想的来信，也不知有多少人宣称已经解决了这个问题. 时至今日，中国科学院数学所几乎每天还能收到这样的来信. 在数学所业务处，记者看到好几大纸箱的讨论猜想的来信. 处长陆柱家研究员对记者说：“这些来信大概除了我之外没有人去处理它. 因为哥德巴赫猜想虽然很简单，但要证明它依然很复杂，非专业人员看不懂，专业人员又没有时间整天埋在这里处理这些来信.”陆处长曾给不少人回过信，告诉他们正确的途径是先写出论文向学术刊物投稿，如果编辑部认为有价值会请专家审稿的，数学所的研究人员都有自己的研究工作. 然而，不断有人寄信来要求鉴定. 有人即使接到了陆处长的信依然不屈不挠地来信.

曾有一天，数学所来了一位 30 多岁的妇女，自述高中毕业. 她还带着自己的孩子. 她说自己证明了哥德巴赫猜想，希望数学所鉴定一下. 陆处长说让她写成论文寄到杂志社去，但她不止一次地来请求.

王元先生说，有许多人来信与他讨论哥德巴赫猜想，有的人还往他家里打电话讨论，更有甚者，有人不知怎么知道了王元家的地址，上门非要与王元讨论哥德巴赫猜想，弄得王元哭笑不得. 王元说：“那些研究哥德巴赫猜想的业余数学爱好者，往往是低层次的，

没有受过严格的数学教育．像一般大学数学系的毕业生几乎都没有搞哥德巴赫猜想研究的，因为他们都知道它的难度．”

业余数学爱好者究竟能不能证明这一猜想呢？徐迟在《哥德巴赫猜想》一文中描写陈景润第一次听到哥德巴赫猜想的情景时写到：当老师介绍了这一猜想后，学生们吵吵嚷嚷地认为没什么了不起．第二天就有几个相当用功的学生给老师送来答案，宣称哥德巴赫猜想已经证明．老师说：“你们算了吧，白费这个劲干什么？你们这些卷子我是看也不会看的，用不着看的．那么容易吗？你们是想骑着自行车到月球上去．”数学所陆柱家处长解释说，如果一个人没有良好的高等数学基础，不了解一些非常现代的数学方法就想证明哥德巴赫猜想，就好比拿着改锥、锯、刨子造一架航天飞机，你说你造出来了，谁信呢？假如能用初等数学的方法证明，那么也早就被人证明了．

北京师范大学数学系惠昌常教授对记者说，他曾经见过一些业余数学爱好者号称攻克哥德巴赫猜想的论证．他说那些论证往往是有问题的．数学方法讲究的是严格的逻辑论证和推导，而那些号称攻克哥德巴赫猜想的论证往往是想当然的推理：因为今天上午阴天，所以下午肯定要下雨．假如是这样论证的话，那么从数学上讲结论是不能被承认的．

数学所收到的关于哥德巴赫猜想的来信五花八门．湖北武汉市的一位数学爱好者给数学所寄来了一封信，他仅用了普通信纸的14行就“证明”了哥德巴赫猜想，而陈景润证明（1＋2）的论文还有20多页呢．江苏南京的一位数学爱好者在给数学所的信中这样写到：“过去我根本不敢碰哥德巴赫猜想，这几年倒来了兴趣，无事可做，搞点有钻头的东西，锻炼脑子也是好的．现在我把我的研究结论寄来，目的当然不是祈望成‘家’，只请你们在备忘录上记一笔，将来有那么一天，出来一个‘大权威’，他得出的结论与

我的相似，你们可以证明一下：这个结论他不是第一个.”广东韶关的一位数学爱好者，在96年底给数学所业务处的信中写到，他给某杂志寄的论文已8个月了，仍无结果，“为使审稿工作简单明了，作者愿出资委托贵处举办一个答辩会. 答辩规模为：邀请20名专家，每一专家审稿费及出场费200元. 租场地、印刷、劳务及一切会务费用均由作者承担.”

许多业余数学爱好者都强调他们研究哥德巴赫猜想是为国争光，有人甚至说：“陈景润死了，我来接班.”王元先生对这些人的评价是：与1958年“大跃进”时期的“人有多大胆地有多大产”有异曲同工之妙. 王元先生劝告那些正在从事哥德巴赫猜想研究的业余数学爱好者不要再白白耗费时间去做无谓的探索了.

* * *

迄今，哥德巴赫猜想依然是一个未解之谜，数学家们依然还看不到证明它的“光明”前途. 不过在各国数学家们已走过的追逐哥德巴赫猜想的探险路上，中国数学家们做出过巨大贡献，并且保持着冠军头衔. 1996年，德国数学家Volke教授曾到中科院数学所访问，他说：“中国数学家对哥德巴赫猜想的贡献那么大，如果哥德巴赫还活着，我猜想他一定会首先选择到中国来访问.”他还赠送给数学所一件礼物：哥德巴赫与欧拉关于哥德巴赫猜想的通信的复印件，以表示他对中国数学家的敬意.

谈谈“筛法”*

在这篇短文里，我们向读者介绍一个在数论中常用的方法，即所谓“筛法”. 为了避免引用较高深的数学工具，我们除了谈谈最古典的埃拉多斯染尼氏（Eratosthenes）筛法及其些微应用外，只略为涉及一点这一方法在近代的发展. 其实在这里所写的一些结果，有关的数论书籍中都有记载，作者只是加以整理与归纳，以便于读者更易于了解这一方法及提供一点作者认为较有趣的数论知识.

一 找出不超过 N 的全部素数

若 $n\leqslant N$，而 n 非素数，则 $n=n_1n_2$，$n_1\geqslant n_2>1$，则得 $n_2\leqslant\sqrt{n_1n_2}=\sqrt{n}\leqslant\sqrt{N}$，这就是说 n 必定能被一个 $\leqslant\sqrt{N}$ 的素数所整除. 这建议我们，如果要找出不超过 N 的所有素数，我们就先找出不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数. 命

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_r\leqslant\sqrt{N}$$

为不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数. 将不超过 N 的整数依大小排列如下：

$$2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ N.$$

先将 p_1 留下，而将 p_1 的其他倍数全部划去；再将 p_2 留下，

---

* 原载《数学通报》，1，1958，2~8.

而将 p_2 的其他倍数划掉；继续行之，待将$\leqslant\sqrt{N}$的素数的倍数都划掉后，剩下来的就是不超过 N 的全体素数了．这就是大家所熟知的埃拉多斯染尼氏筛法．

素数表都是根据这一方法略加变化而造出来的．素数表中最准确者当推莱末（Lehmer）氏的从 1 到 10 006 721 的素数表［D. N. Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10 006 721, Carn. Inst., Washington, 165 (1914)］．有居立刻（Kulik）氏者，他曾造出不超过 10^8 的素数表．他的手稿放在维也纳科学院内．

命 $[x]$ 表示 x 的整数部份．例如：$[1.5]=1$，$[0.1]=0$，$[-3.2]=-4$ 等．不超过 N 而又为正整数 d 的倍数的正整数的个数显然等于$\left[\frac{N}{d}\right]$．以 $\pi(N)$表示不超过 N 的素数的个数，则按上述原则可得

$$\begin{aligned}\pi(N)=r+N-1-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]&\\+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]&\\+\cdots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right].&\qquad(1)\end{aligned}$$

(1) 式的证明如下：首先不超过$\sqrt{N}$的素数个数为 r．其次当计算大于$\sqrt{N}$而又不超过N 的素数个数时，划去所有 $p_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 的倍数，共计划去 $\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]$个数．但若一个数同时是 p_i 与 $p_j\,(i\neq j)$ 的倍数时，则计算了二遍，所以，我们又必须添上，因此需加上 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]$个数．又若一数是 $p_ip_jp_k\,(i<j<k)$的倍数时，则被划去了$\binom{3}{1}=3$ 次，而被添上了$\binom{3}{2}=3$ 次．故又必须再行减去，即减去 $\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]$．依次类推，若 n 恰有 k 个$\leqslant\sqrt{N}$的素因子，则共

减去$\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+\cdots$次，共加上$\binom{k}{2}+\binom{k}{4}+\cdots$次．而

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{n}$$
$$=(1-1)^2-1=-1,$$

故只被减一次．(1)式得证．

将这一原则用抽象的术语写出就得到：

逐步淘汰原则：设有 N 件事物，其中 N_α 件有性质 α，N_β 件有性质 β，…，$N_{\alpha\beta}$件兼有性质 α 及 β，…，$N_{\alpha\beta\gamma}$件兼有性质 α，β 及 γ，依次类推，则此事物中之既无性质 α，又无性质 β，…者之件数为

$$N-N_\alpha-N_\beta-\cdots+N_{\alpha\beta}+\cdots-N_{\alpha\beta\gamma}-\cdots.$$

以下我们再举一例来说明这一原则的应用．

以 $\varphi(n)$表示不超过 n 而与 n 互素的正整数个数．$\varphi(n)$即通常所谓的欧拉(Euler)函数．例如 $\varphi(1)=1$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$ 等．一般言之，我们有

$$\varphi(n)=n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

(此处 $\prod\limits_{p\mid n}$ 表示通过 n 的不同的素因子的乘积)

命 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式．在逐步淘汰原则中命性质 α 为被 p_1 整除，性质 β 为被 p_2 整除，依次类推，则与 n 互素的数既无性质 α，又无性质 β，…．故由逐步淘汰原则得

$$\varphi(n)=n-\sum_{\substack{p_i\mid n\\1\leqslant i\leqslant s}}\frac{n}{p_i}+\sum_{\substack{p_ip_j\mid n\\1\leqslant i<j\leqslant s}}\frac{n}{p_ip_j}$$
$$-\cdots+(-1)^s\frac{n}{p_1\cdots p_s}=n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

二　素数之出现概率为零

我们都知道素数的个数有无穷多，但不超过 N 的素数个数

$\pi(N)$与 N 的比$\pi(N)/N$的分布情形又如何呢？如果$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}$存在，我们就称$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}$为素数的出现概率．运用上节的原则，我们将证明

定理 1 素数的出现概率为零，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0.$$

由定理 1 立刻推知复合数的出现概率是 1．用数论的术语来说就是"几乎所有"的数皆非素数，也就是说"几乎所有"的数都是复合数．

在证明定理 1 之前先证次之两引理．

引理 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．

证：
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^t}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{2^{t-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^t}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{2^t}+\cdots+\frac{1}{2^t}\right)\\&=1+\frac{t}{2}\to\infty\ (\text{当 } t\to\infty \text{ 时}).\end{aligned}$$

引理 2 乘积 $\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$，此处之 p 通过所有的素数．

证：如果引理不成立，由于$1-\frac{1}{p}>0$，则必$\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=a>0$．故$\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\frac{1}{a}$．命 $N=2^t$，此处 $t=2\left(\left[\frac{1}{a}\right]+1\right)$，则由上面

引理的证明可知

$$\frac{1}{a}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}>\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$=\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{p^{a}}\right)>\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{a=0}^{N}\frac{1}{p^{a}}\right)>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>1+\frac{t}{2}$$

$$=\left[\frac{1}{a}\right]+2>\frac{1}{a}+1,$$

即$\frac{1}{a}+1<\frac{1}{a}$.此为矛盾,故得引理.

定理1的证明:与证明(1)式一样,可知不超过 N 的正整数中不被前 r 个素数整除的整数个数 $\pi(N;r)$ 为:

$$\pi(N;r)=N-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\cdots+(-1)^{r}\left[\frac{N}{p_1\cdots p_r}\right]. \qquad (2)$$

由于大于 p_r 而又不超过 N 的素数不能被前 r 个素数整除,故得

$$\pi(N)\leqslant r+\pi(N;r). \qquad (3)$$

由于$[x]=x-\theta,0\leqslant\theta<1$,故由(2),(3)得

$$\pi(N)<r+N\left(1-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{1}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^{r}\frac{1}{p_1\cdots p_r}\right)+\left(1+\sum_{i=1}^{r}1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}1+\cdots\right)$$

$$=N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^{r}+r<N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^{r+1}.$$

取 $r+1=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]$,则得

$$0<\frac{\pi(N)}{N}<\prod_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]}}{N}$$

$$=\prod_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

当 $N\to\infty$ 时,由引理 2 即得出 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0$.

定理 1 证毕.

三　"孪生素数"的倒数级数收敛

当 p 与 $p+2$ 同时为素数时, 我们就称 $(p,\ p+2)$ 为一对"孪生素数". 素数论中有这样一个引人入胜而迄今未解决的猜测: 孪生素数对有无穷多.

欧拉曾证明过 $\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$ 发散, 此处 p 经过所有的素数, 从而提供了"素数有无限多"的另一证明. 因此使人联想起是否有方法能判定级数 $\sum\limits_{p^*}\frac{1}{p^*}$ 之收敛与否呢? 此处之 p^* 通过所有的孪生素数. 倘仍发散, 则猜想就成立了. 否则仍不能判定孪生素数有限, 或无限. 盖若孪生素数有限, 则此级数一定收敛; 若无限, 亦可能收敛. 仆朗 (Brun) 由于他对埃拉多斯染尼氏筛法的概念进行了极重要的修改, 从而证明了

定理 2　级数 $\sum\limits_{P^*}\frac{1}{P^*}$ 收敛. 此处 P^* 经过所有孪生素数.

在证明前先证以下诸引理.

引理 3 (仆朗)　命 n 为无平方因子之一数, m 为正整数; 又命 $\Omega(d)$ 为 d 的互异的素因子的个数, 则

$$\sum_{\substack{d\mid n\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}(-1)^{\Omega(d)}\begin{cases}=1, & 若\ n=1;\\ \geqslant 0, & 若\ n>1.\end{cases}$$

证: 当 $n=1$ 时, 引理显然成立.

当 $n>1$ 时, 只要证明适合 $d\mid n$ 及 $\Omega(d)\leqslant 2m$ 的 d 之中, $\Omega(d)$ 为偶数者不少于 $\Omega(d)$ 为奇数者. 若 p_0 为 n 的最小素因子, 对于 n 的每一个因子 d, 我们按下面的方法造出 n 的另一个因子 d':

$$d'=\begin{cases}dp_0, & 若\ p_0\nmid d;\\ \dfrac{d}{p_0}, & 若\ p_0\mid d.\end{cases}$$

显然每一 d 唯一对应一个 d'.

若 $d\mid n$, $\Omega(d)\leqslant 2m$ 而 $2\nmid\Omega(d)$, 则 $\Omega(d)\leqslant 2m-1$. 故其对应之 d' 有性质 $d'\mid n$, $2\mid\Omega(d')$ 及 $\Omega(d')\leqslant 2m$. 引理得证.

为记载之简便计, 我们引入同余式.

若 m 为正整数, a 与 b 为整数, 又若 $m\mid(a-b)$, 则称 a 与 b 对模 m 同余. 记之以 $a\equiv b(\bmod m)$.

引理 4(孙子定理) 若 d_1 与 d_2 互素, 则联立同余式

$$\begin{cases}n\equiv a(\bmod d_1),\\ n\equiv b(\bmod d_2),\end{cases}$$

在区间 $1\leqslant n\leqslant d_1d_2$ 内有唯一的解.

证: 因为 d_1 与 d_2 互素, 所以由辗转相除法可知有两个整数 m_1 及 m_2 使

$$m_1d_1-m_2d_2=1,$$

即得

$$(a-b)[m_1d_1-m_2d_2]=(a-b).$$

显然

$$n_0-(a-b)(m_2d_2)+b=-(a-b)(m_1d_1)+a$$

即为联立同余式的公解. 而 $n_0+md_1d_2(m=0,\pm1,\cdots)$ 都是公解, 所以 m_0 存在, 使 $1\leqslant n_0+m_0d_1d_2\leqslant d_1d_2$.

设有 n_0 及 n_0' 均满足联立同余式, 且 $1\leqslant n_0$, $n_0'\leqslant d_1d_2$, 而 $n_0\neq n_0'$, 则由于

$$n_0\equiv n_0'\equiv a(\bmod d_1),$$

故 $d_1\mid(n_0-n_0')$. 同样 $d_2\mid(n_0-n_0')$ 因为 d_1 与 d_2 互素, 故 $d_1d_2\mid(n_0-n_0')$, 此不可能, 除非 $n_0=n_0'$. 故得引理.

引理 5　命 $d=q_1\cdots q_s$，此处 $q_1<\cdots<q_s$ 均为素数，则

$$n(n+2)\equiv 0(\bmod d)\quad (A<n\leqslant A+d)$$

之解数为 $\begin{cases}2^s & (\text{当 } q_1>2);\\ 2^{s-1} & (\text{当 } q_1=2).\end{cases}$

证：不失一般性，我们可以假定 $A=0$，此乃由于若 $n=a$ 为同余式之解，则 $a+md(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为其解.

(i) $n(n+2)\equiv 0(\bmod 2)(0<n\leqslant 2)$ 只有一解 $n=2$.

(ii) 命 p 为大于 2 的素数，则同余式 $n(n+2)\equiv 0(\bmod p)(0<n\leqslant p)$ 只有两个解，即 $n=p-2$ 与 $n=p$.

(iii) 若 d_1 与 d_2 互素，则同余式

$$n(n+2)\equiv 0(\bmod d_1d_2)(0<n\leqslant d_1d_2) \tag{4}$$

的解数为同余式

$$n(n+2)\equiv 0(\bmod d_1)(0<n\leqslant d_1) \tag{5}$$

的解数及同余式

$$n(n+2)\equiv 0(\bmod d_2)(0<n\leqslant nd_2) \tag{6}$$

的解数之积.

此事实证明如下：命 $a_1<a_2<\cdots<a_r$ 为(5)式之解，$b_1<b_2<\cdots<b_s$ 为(6)式的解. 由引理 4 可知每一对 a_i 与 b_j 唯一对应(4)之一个解，反之，(4)式之一解 $n=c$ 必为(5)，(6)之解.

综合(i)，(ii)，(iii)即得引理.

引理 6　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.

证：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n^{3/2}}<1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n^2}$$
$$<1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{2^m-1}-\frac{1}{2^{m+1}-1}\right)$$

$$<1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^m-1}$$

$$=1+2\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^m}=\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}.$$

引理证完.

引理 7 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{3/2}n}$ 收敛.

证:由于

$$\frac{1}{2\log^{3/2}2}+\frac{1}{3\log^{3/2}3}<\frac{2}{2\log^{3/2}2}=\frac{1}{\log^{3/2}2},$$

$$\frac{1}{4\log^{3/2}4}+\cdots+\frac{1}{7\log^{3/2}7}<\frac{4}{4\log^{3/2}4}=\frac{1}{2^{3/2}\log^{3/2}2},$$

…………

$$\frac{1}{2^r\log^{3/2}2^r}+\cdots+\frac{1}{(2^{r+1}-1)\log^{3/2}(2^{r+1}-1)}$$

$$<\frac{2^r}{2^r\log^{3/2}2^r}=\frac{1}{r^{3/2}\log^{3/2}2}.$$

故由引理 6 得出

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{3/2}n}=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=2^r}^{2^{r+1}-1}\frac{1}{m\log^{3/2}m}$$

$$<\frac{1}{\log^{3/2}2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{3/2}}\leqslant\frac{1}{\log^{3/2}2}\cdot\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}.$$

引理证完.

引理 8 存在绝对常数 $c(>3)$,使当 $x\geqslant 3$ 时

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}<c\log\log x,$$

$$\prod_{2<p\leqslant x}\left(1-\frac{2}{p}\right)<\frac{c}{\log^2 x},$$

此处 p 表示素数.

本引理的证明需涉及到比较多一点的内容，故略去，读者请看华罗庚著《数论导引》第五章，第九节.

引理 9 命 $y>90$, p_i 为第 i 个素数, p_r 为不超过 y 最大的素数, $p=p_1\cdots p_r$, 又命 $m=[(4c\log\log y)^2]+1$(c 为引理 8 中之常数)，则

$$\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)}\leqslant(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3},$$

$$\left|\sum_{\substack{d\mid p\\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}} \frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}\right|<\frac{1}{\log^3 y}.$$

证：
$$\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)}\leqslant\sum_{s=0}^{2m}\binom{r}{s}2^s$$

$$\leqslant\sum_{s=0}^{2m}(2r)^s=\frac{(2r)^{2m+1}-1}{2r-1}<(2r)^{2m+1}$$

$$<(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}.$$

当 $n>90$ 时，

$$n!\ =e^{\sum\limits_{m=1}^{n}\log m}\geqslant e^{\sum\limits_{\frac{n}{3}\leqslant m\leqslant n}\log m}$$

$$\geqslant e^{\frac{2}{3}n\log\frac{n}{3}}>e^{\frac{n}{2}\log n}=n^{\frac{n}{2}}.$$

故由引理 8(注意 $2m+1>90$)得

$$\left|\sum_{\substack{d\mid p\\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}} \frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=2m+1}^{r}\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)=s}}\frac{2^{\Omega(d)}}{d}\leqslant\sum_{s=2m+1}^{r}\frac{\left(\frac{2}{p_1}+\cdots+\frac{2}{p_r}\right)^s}{s!}$$

$$\leqslant\sum_{s=2m+1}^{r}\left(\frac{2c\log\log y}{\sqrt{s}}\right)^s\leqslant\sum_{s=2m+1}^{r}\left(\frac{2c\log\log y}{\sqrt{2m}}\right)^s$$

$$<\sum_{s=2m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^s=\frac{1}{2^{2m}}<\frac{1}{2^{2(4c\log\log y)^2}}$$

$$<\frac{1}{\log^3 y}.$$ 引理证完.

引理 10 以 $Z(N)$ 表示不超过 N 的孪生素数对数，则存在绝对常数 C_0 及 N_0，当 $N>N_0$ 时

$$Z(N)<\frac{C_0 N}{\log^{3/2} N}.$$

证：如引理 9 之各假定，则得

$$Z(N)\leqslant Z(p_r)+\sum_{\substack{p_r<n\leqslant N\\(n(n+2),p)=1}}1=Z(y)+\sum. \qquad (7)$$

(7)式之证明甚易，盖当 $n>p_r$，而 n 与 $n+2$ 为一对孪生素数，则必 $(n(n+2),p)=1$.

当 $d\mid P$ 时，由引理 5 得出

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n(n+2)\equiv 0(\bmod d)}}1=2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}\left[\frac{N}{d}\right]+\theta 2^{\Omega(d)}$$

$$=2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}\frac{N}{d}+\bar{\theta}2^{\Omega(d)}(0\leqslant\theta\leqslant 1,|\bar{\theta}|\leqslant 1).$$

故由引理 3，引理 8，引理 9 得

$$\sum\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant N(n(n+2),p)=1}1\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\sum_{\substack{d\mid(n(n+2),p)\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}(-1)^{\Omega(d)}$$

$$=\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}(-1)^{\Omega(d)}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n(n+2)\equiv 0(\bmod d)}}1$$

$$\leqslant N\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}\frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}+\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}2^{\Omega(d)}$$

$$=N\sum_{d\mid p}\frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}$$

$$-N\sum_{\substack{d\mid p\\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}}\frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}$$

$$+\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}2^{\Omega(d)}<\frac{N}{2}\prod_{0<p\leqslant y}\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

$$+\frac{N}{\log^3 y}+(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}$$

$$\leqslant\frac{cN}{2\log^2 y}+\frac{N}{\log^3 y}+(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}.$$

取 $y=e^{(\log N)^{3/4}}$，由(7)式可知存在 N_0，当 $N>N_0$ 时

$$Z(N)<y+\frac{cN}{2\log^2 y}+\frac{N}{\log^3 y}$$

$$+(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}<\frac{c_0 N}{\log^{3/2} N}.$$

其实此处之 N_0，c_0 皆可以具体算出：即求 N_0，当 $N>N_0$ 时，$y<\frac{N}{\log^{3/2} N}$ 及 $(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}<\frac{N}{\log^{3/2} N}$，此处 $y=e^{(\log N)^{3/4}}$，而 $c_0=\frac{c}{2}+3$.

引理证完.

定理 2 的证明：命 p_r^* 表示第 r 个孪生素数，当 $p_r^*>N_0$ 时，由引理 10 得

$$r=Z(p_r^*)<\frac{c_0 p_r^*}{\log^{3/2} p_r^*}<c_0\frac{p_r^*}{\log^{3/2} r},$$

即

$$p_r^*>\frac{1}{c_0}r\log^{3/2} r.$$

因此由引理 7 得知

$$\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}=\sum_{p^*\leqslant N_0}\frac{1}{p^*}+\sum_{p^*>N_0}\frac{1}{p^*}<N_0+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{c_0}r\log^{3/2} r}$$

$$<N_0+\frac{c_0}{\log^{3/2}2}\cdot\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}.$$

定理证完.

四 结束语

筛法的起源很早，在公元前三百年，埃拉多斯染尼氏就提出了这一想法．但其重要及蓬勃的发展，还只是近四十年的事．首先是

仆朗，他将埃拉多斯染尼氏筛法的观念加以重要的修正，从而使得与素数有关的若干经典而著名的困难问题，在弱调的提法上，即将原来命题中的素数换为殆素数，得到了解决．所谓殆素数者，即素因子个数，包括相同的与相异的，不超过某一确定限的整数．一般说来这一限是可以具体算出来的．就以刚才所说的关于孪生素数的猜想来说，目前我们已能证明：

满足下面条件的正整数对（n，$n+2$）有无穷多：

1° n（$n+2$）为不超过5个素数的乘积．

2° n 与 $n+2$ 的素因子个数均不多于3．（仆朗原来的结果为：存在无限多个正整数 n，而 n 与 $n+2$ 的素因子个数各不超过9）

仆朗的方法引起了不少数学家的兴趣，他们或改进了这一方法，或将这一方法用到其他新问题上去，实际上，有的已越逾了数论的范畴，在此不详谈了．

1947年，赛尔贝尔格（Selberg）提出了埃拉多斯染尼氏筛法新的改良，一般说来，由此可以获得比仆朗方法更精密的结果．原苏联数学家列尼克（Линник）在1941年发表的“大筛法”，则是从另一角度来改进埃拉多斯染尼氏筛法，亦有不少卓越而有趣的运用．在此都不介绍了．

关于筛法进一步的知识，我们建议有兴趣的读者去看华罗庚著的《数论导引》第九章与第十九章，以及中国科学院数学研究所数论组所撰写的关于哥德巴赫（Гольдбах）问题的资料（即将在数学进展上登载）．最后，我殷切地期待着读者们的建议与批评．

素　数*

序　言

在数学中，数论是研究数的性质，特别是研究整数性质的分支，它和几何学一样，是最古老的数学分支.

素数就是除 1 与其自身外，没有其他因数的大于 1 的自然数. 在自然数列中，最初的几个素数是

2，3，5，7，11，13，17，…

素数的性质是数论最早的研究课题之一，现在则已发展成为数论的一个独立分支——素数论. 素数论是数论中十分有味与引人入胜的一个分支，它里面有着许多没有解决的奇妙的猜测.

这本小册子将介绍素数论方面的一些结果，前面一部分（一～十一）是算术部分. 在中学的数学课中，平面几何学是训练逻辑推导最好的课程. 此外，初等数论也能起到这个作用，它有助于培养分析问题和解决问题的能力. 这一部分并不涉及更多的定义与知识，所以只要耐心阅读，高中的学生是可以看得懂的. 但素数论方面的重要与深刻的结果，常常是用精深的数学方法，特别是精深的分析方法得到的. 如果不讲这一部分，就会给人以错觉，好像近代的素数论研究，只要从整数与素数的定义出发，作一些算术推导就

---

* 本书以《谈谈素数》为名于 1978 年由上海教育出版社出版，1996 年作修改后，改名《素数》，由广东科技出版社出版，同时，台湾九章出版社出繁体字本.

行了．事实当然不是这么回事，所以在十二～二十四中，我们将假定读者学过微积分并了解实数的极限概念．这一部分着重介绍近代素数论的一些问题与结果，而将证明省略了．讲这一部分的目的是给读者增加一点数学常识，属于近代数学的那些结论中，能让非专业人员了解的，也许除数论以外就不多了．从这里也不难看到，虽然素数论中的许多问题表面上提法都很简单，但是近代素数论的重要成就，却往往是在近代数学成就的基础上，通过十分迂回的道路而得到的．反过来，为了解决素数论中的问题，也曾多次刺激并带动了其他不少数学分支的重要发展，因此素数论在数学中并不是孤立的，而是与很多数学分支密切相关的．由上所述，我们认为企图从整数与素数的定义出发，用简单的算术方法来处理这一类问题是不易收效的．不少事例表明这样做往往劳而无功，我们应该从中总结经验教训．总之，我们认为有兴趣于这类经典问题（例如哥德巴赫问题）的人，应该具备相当的数学知识与修养，而且应该先熟悉素数论中已有的成果与方法，再作进一步的探讨，才可能会是有益的．

这本小册子取材于华罗庚老师的著作《数论导引》（科学出版社，1957 年）、《指数和的估计及其在数论中的应用》（科学出版社，1963 年）及夕尔宾斯基著《关于素数——我们已知和未知的》（波兰，华沙，1961 年）．笔者仅仅作了一些整理与归纳，使读者更便于了解素数论的概貌．另外，由于上面几本著作都已出版十多年了，所以本书也引证了一些新的文献，供作参考．

在撰写的过程中，承蒙陈景润同志的热情支持与帮助，又承蒙于坤瑞、徐广善等同志帮助准备手稿，他们提出了不少宝贵的意见．我谨在此向他们致以最衷心的感谢．限于笔者的水平，错误与不妥之处，还希望读者不吝指教．

一 素数与复合数

自然数是指

$$1,2,3,\cdots$$

中的数.整数是指

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

中的数.所以自然数就是正整数.

任意给出二整数 a 与 b,其中 $b>0$,如果有一个整数 c 使

$$a=bc,$$

就称 b 可以整除 a,a 称做 b 的倍数,b 称做 a 的因数,记为 $b\mid a$.假若 b 不能整除 a,就记做 $b\nmid a$.注意,这里因数都是正的.记

$$|a|=\begin{cases} a, & 当\ a\geqslant 0, \\ -a, & 当\ a<0. \end{cases}$$

我们称 $|a|$ 为 a 的绝对值.如果 $b\mid a$,而且 $1<b<|a|$,我们就称 b 是 a 的真因数.

显然,对于任何正整数 a 都有

$$1\mid a,\ a\mid 0,\ a\mid a,$$

这说明 a 至少有因数 1 和 a.

自然数可以分成三类:

1)1,只有自然数 1 为它的因数.

2)p,正好有而且只有自然数 1 及 p 为它的因数.换句话说,p 是大于 1 而又没有真因数的自然数.

3)n,有两个以上大于 1 的因数.换句话说,n 是有真因数的自然数.

第 2)类数叫素数,又称质数.例如

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,\cdots$$

我们常常用 $p,q,r,p_1,p_2,\cdots$ 等等来表示素数.

第 3)类数叫复合数.例如

$$4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,\cdots$$

我们常常用 $n,l,m,a,b,\cdots$ 等等来表示复合数.

2 能整除的自然数叫做偶数,如 $2,4,6,8,\cdots$ 而 2 不能整除的自然数叫做奇数,如 $1,3,5,7,\cdots$ 显然大于 2 的偶数都是复合数.所以只有一个偶素数 2,其余的素数都是奇素数.

二　唯一分解定理

引理 1　大于 1 的自然数 n 都可以分解成为素数的乘积.

证:如果 n 本身就是一个素数,那么定理就已经成立了.现在假定 n 是复合数,那么 n 总有一个最小的真因数 q_1.我们先证明 q_1 一定是素数.如果 q_1 是复合数,那么 q_1 还有真因数 r_1,当然 $r_1<q_1$,而且 r_1 也是 n 的真因数.这与 q_1 是 n 的最小真因数相矛盾,所以 q_1 是素数.记

$$n=q_1n_1,\qquad 1<n_1<n.$$

如果 n_1 已经是素数,那么定理即成立.如果 n_1 不是素数,假定 q_2 是 n_1 的最小素因数,即得

$$n=q_1q_2n_2,\qquad 1<n_2<n_1<n.$$

我们继续实行上面这种手续,得 $n>n_1>n_2>\cdots>1$,这种手续不能超过 n 次,最后得

$$n=q_1q_2\cdots q_k,$$

其中 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 都是素数(注意:$q_1,q_2,\cdots,q_k$ 不一定是互不相同的).这个式子叫做 n 的素因数分解式.引理证完.

例如:　$10\,725=3^1\cdot5^2\cdot11^1\cdot13^1$.

我们可以把大于 1 的自然数 n 的素因数分解式写成

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},$$

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 都是素数,而 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 都是自然数.这个

式子叫做 n 的标准分解式.

引理 2 如果 p 是素数而且 $p|ab$,那么必定 $p|a$ 或 $p|b$.

证:不妨假定 a,b 都是自然数.假定引理不成立,那么一定有一个最小的素数 p 使引理不成立.对于这个素数 p,又有最小的 ab 使引理不成立,即 $p|ab$ 而 $p\nmid a$, $p\nmid b$.

我们先来证明 $a<p$, $b<p$.假如不然,例如假定 $a>p$,由于 $p\nmid a$,所以用 p 除 a,所得的余数 a_1 必在 0 与 p 之间,即

$$a=kp+a_1, 0<a_1<p.$$

因此

$$ab=(kp+a_1)b=kbp+a_1b.$$

由 $p|ab$ 及 $p|kbp$ 得 $p|(ab-kbp)$,即 $p|a_1b$.然而 $p\nmid a_1$, $p\nmid b$,从而有 $a_1b<ab$ 使引理不成立.这与 ab 是使引理不成立的最小数的定义相矛盾.所以 $a<p$,同理可知 $b<p$,因此 $ab<p^2$.

现在来证明 $p|ab$ 而 $p\nmid a$, $p\nmid b$ 将引出矛盾.因 $p|ab$,所以 $ab=lp$.若 $l=1$,那么 p 有真因数 a 与 b.这与素数的定义相矛盾.因此 $l>1$.另一方面,上面已证 $ab<p^2$,所以 $l<p$.由引理 1 的证明可知,假定 q 是 l 的最小非 1 的因数,那么 q 为素数.由于 $l|ab$,所以 $q|ab$.因为 $q\leqslant l<p$,所以由 p 是最小的使引理不成立的素数这一假定,可知 $q|a$ 或 $q|b$.我们不妨假定 $q|a$.记 $a=a'q$.由于前设 $q|l$,记 $l=tq$,代入 $ab=lp$ 得

$$a'qb=tqp.$$

因而 $a'b=tp$,即 $p|a'b$.但这样 $a'b<ab$, $p\nmid a'$, $p\nmid b$.这与关于 p 与 ab 的假定相矛盾.引理证完.

定理 1 (唯一分解定理) 大于 1 的自然数 n 的标准分解式是唯一的.换句话说,如果不计次序,那么 n 只有唯一的方法表示成素数的乘积.

证:由引理 2 显然可知,如果 p 是素数,

$$p \mid ab\cdots c,$$

那么 p 一定能整除 $a, b, \cdots, c$ 中的一个.又如果 $a, b, \cdots, c$ 都是素数,那么 p 一定是 $a, b, \cdots c$ 中的一个.

假定 n 有两种标准分解式

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_l^{b_l}.$$

那么任何 p_i 必定为 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 中的一个,任何 q_j 也必定为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 中的一个.所以 $k = l$.由于

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_k \text{ 及 } q_1 < q_2 < \cdots < q_k,$$

所以

$$p_i = q_i, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

最后,如果有 $a_i > b_i$,这里 $1 \leqslant i \leqslant k$,那么以 $p_i^{b_i}$ 除 n 的标准分解式得

$$p_1^{a_1} \cdots p_i^{a_i - b_i} \cdots p_k^{a_k} = p_1^{b_1} \cdots p_{i-1}^{b_{i-1}} p_{i+1}^{b_{i+1}} \cdots p_k^{b_k}.$$

上式的左边是 p_i 的倍数,但右边不是,这不可能.同样 $a_i < b_i$ 也是不可能的,所以

$$a_i = b_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

定理证完.

顺便说一句,我们不把 1 看成素数,是因为如果把 1 看成素数,那么在 n 的标准分解式前面,可以乘上 1 的任何次幂,这就破坏了标准分解式的唯一性了.

虽然在理论上,任何自然数 n 都是可以写成标准分解式的.但当 n 很大时,具体写出 n 的标准分解式来却是很不容易的事.有时甚至连 n 的一个素因数也找不出来.例如人们已经证明 $M_{101} = 2^{101} - 1$(共 31 位)是两个不同素数的乘积,其中较小的一个至少有 11 位,但我们至今还不知道这两个素因数是什么[①].又例如在 1958 年,

---

① J. Brillhart and G. D. Johnson, On the factors of certain Mersenne numbers, *Math. Comp.*;14(1960),553~555.

人们就知道 $F_{1945}=2^{2^{1945}}+1$ 的最小素因数 $p=5\times2^{1947}+1$. 但至今我们并不知道 F_{1945} 的其他素因数①. 由于

$$2^{1945}=32\times2^{1940}=32\times(2^{10})^{194}>30\times(10^3)^{194}$$
$$=3\times10^{583},$$

所以

$$F_{1945}>2^{3\times10^{583}}=(2^{10})^{3\times10^{582}}>10^{9\times10^{582}},$$

即 F_{1945} 是一个超过 10^{582} 位的自然数, 而 p 则是一个有 587 位的素数.

假定 a 与 b 是两个整数, 但不都是 0. 如果 $c\mid a$, $c\mid b$, 我们就称 c 是 a 与 b 的公因数. 如果 $a\neq0$, 那么由 $c\mid a$ 可得 $a=cd$, 其中 $d\neq0$ 是整数, 即 $|d|\geqslant1$. 所以, $|a|=|cd|=c|d|\geqslant c$, 即 a 与 b 的公因数 c 不大于 a 的绝对值 $|a|$. 因此, a 与 b 的公因数中一定有一个最大的, 称为 a 与 b 的最大公因数, 记为 (a,b). 例如

$$(5,3)=1,\qquad (20,45)=5,$$
$$(11,-242)=11,\qquad (0,-377)=377$$

等等. 如果 $(a,b)=1$, 就称 a 与 b 互素.

我们用 $r=\min(m,n)$ 表示 r 等于 m 与 n 中较小的一个. 例如 $5=\min(5,13)$. 我们又用 $s=\max(m,n)$ 表示 s 等于 m 与 n 中较大的一个. 例如 $13=\max(5,13)$.

定理 2 假定 a 与 b 是二正整数, 把它们写做

$$a=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s},\qquad a_1\geqslant0,\cdots,a_s\geqslant0,$$
$$b=p_1^{b_1}\cdots p_s^{b_s},\qquad b_1\geqslant0,\cdots,b_s\geqslant0,$$

其中 $p_1<\cdots<p_s$ 都是素数, 那么

① R. M. Robinson, A report on primes and on factors of Fermat numbers, PAMS; 9 (1958), 673~681.

$$(a,b)=p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s},$$

其中 $c_i=\min(a_i,b_i)(1\leqslant i\leqslant s)$.

证:如果 $c\mid a$, $c\mid b$,那么由引理 2 可知 c 的素因数只能是 p_1, $\cdots$, p_s,即

$$c=p_1^{d_1}\cdots p_s^{d_s}.$$

显然 $d_1\leqslant a_1$, $d_1\leqslant b_1$,所以, $d_1\leqslant\min(a_1,b_1)=c_1$.同理 $d_i\leqslant c_i(2\leqslant i\leqslant s)$.因此

$$c\leqslant p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s},$$

即 a, b 的任何公因数 c 不大于 $p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s}$.另一方面, $p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s}\mid a$, $p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s}\mid b$,即 $p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s}$ 是 a, b 的公因数.所以 $p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s}$ 是 a 与 b 的最大公因数.定理证完.

三　素数有无穷多

现在发生一个问题,素数究竟只有有限多个呢? 还是有无穷多? 这件事早在欧几里德(Euclid)就已经知道了:素数有无穷多.

定理 1　素数有无穷多.

证:如果素数的个数有限,那么我们就可以将全体素数列举如下:

$$p_1, p_2, \cdots, p_k.$$

命

$$q=p_1p_2\cdots p_k+1.$$

q 总是有素因数的,但我们可证明任何一个 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都除不尽 q.假若不然,由 $p_i\mid q$ 及 $p_i\mid p_1p_2\cdots p_k$ 就得到 $p_i\mid(p_1p_2\cdots p_k-q)$,即 $p_i\mid 1$,这是不可能的.故任何一个 p_i 都除不尽 q,这说明 q 有不同于 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的素因数.这与 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是全体素数的假定相矛盾,所以素数有无穷多.定理证完.

对于每一个素数 p，命 $p^{\#}$ 为所有适合 $q \leqslant p$ 的素数 q 的乘积，例如 $5^{\#} = 2\times3\times5$. $13\,649^{\#}+1$ 是已知最大的形如 $p^{\#}+1$ 的素数，当 $p<11\,213$ 时，除 $p=2,3,5,7,11,31,379,1019,1021,2657$ 外，所有 $p^{\#}+1$ 都是复合数①.

由定理 1 的证明立刻可以推出：

定理 2 假定 $n>2$，那么在 n 与 $n!$（$n!$ 表示不超过 n 的自然数的连乘积，即 $n! = 1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$）之间一定有一个素数.

证：假定不超过 n 的素数为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，又假定 $q = p_1p_2\cdots p_k - 1$. 由于 $n>2$，所以 $q>4$. 由定理 1 的证明可知 q 有一个不同于 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的素因数 p，所以 $p>n$. 另一方面，$p\leqslant q\leqslant n!-1<n!$. 定理证完.

定理 1 的证明方法还可以用来证明更广泛的结果. 例如：

定理 3 形如 $4n+3$ 的素数有无穷多.

证：如果形如 $4n+3$ 的素数有限，则可假定它们的全体是

$$p_1, p_2, \cdots, p_k.$$

命

$$q = 4p_1p_2\cdots p_k - 1 = 4(p_1p_2\cdots p_k - 1) + 3.$$

从而 q 是形如 $4n+3$ 的，而且任何 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都除不尽 q. 由于除掉 2 以外，素数都是奇数，因此奇素数用 4 除以后，所得的余数必定是 1 或 3. 又由于两个 4 除余 1 的数 $4l+1$ 与 $4m+1$ 相乘得

$$(4l+1)(4m+1) = 4(4lm+l+m)+1,$$

仍然是一个 $4n+1$ 型的数. 因 q 是 $4n+3$ 型的数，所以 q 的素因数不可能都是形如 $4n+1$ 的数，即 q 还有形如 $4n+3$ 的素因数，但又不能是 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 中的一个. 这与对于 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的假定相矛盾，所以形如 $4n+3$ 的素数有无穷多. 定理证完.

---

① P. Ribenboim, The Book of Prime Number Records, Springer-Verlag, 1989.

读者可以仿照以上证法，证明形如 $6n+5$ 的素数有无穷多，形如 $4n+1$ 的素数也有无穷多，这将在八中证明.

虽然素数的个数有无穷多，但我们并不能写出任意大的素数来.目前所知道的最大素数都是通过特殊的方法，而且借助于电子计算机才得到的.现在我们知道的最大素数是

$$M_{858\,433}=2^{858\,433}-1$$

共 258 415 位.

四　素数表

所谓素数表，就是造一张表，其中包括不超过已知自然数 N 的所有素数.先讲一条引理.

引理 1　每一个复合数 n 至少有一个素因数 $\leqslant\sqrt{n}$.

证：假定 p 是 n 的最小真因数，那么由引理 2.1(即二中引理 1)的证明可知 p 是素数.现在来说明 $p\leqslant\sqrt{n}$.由于 n 是复合数，所以可以将 n 写作 $n=pn_1$.因 p 是 n 的最小因数，所以 $n_1\geqslant p$.如果 $p>\sqrt{n}$，就有 $n=pn_1>\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n$.矛盾.所以 $p\leqslant\sqrt{n}$.引理证完.

我们先找出不超过 $\sqrt{N}$ 的全部素数，依次排列如下：

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_r\leqslant\sqrt{N}.$$

然后把大于 1，而又不超过 N 的自然数，按大小次序排列如下：

$$2,3,\cdots,N.$$

在其中留下 $p_1=2$，而把 p_1 的倍数全部划掉，再留下 p_2，而把 p_2 的倍数都划掉，继续这一手续，最后，留下 p_r，而把 p_r 的倍数都划掉.留下的就是不超过 N 的全体素数了.这是因为由引理 1 可知，如果 $n\leqslant N$ 而又是复合数，那么 n 必定有一个素因数 $\leqslant\sqrt{N}$，所以被划掉了.如果 n 是 $\leqslant\sqrt{N}$ 的素数，那么规定 n 留下.如果 n 是满足 $\sqrt{N}<n\leqslant N$ 的素数，那么 n 不会是任何 p_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 的倍数，所以 n 也留下来了.因此留下来的是不超过 N 的全体素

数.

例如要求出不超过 50 的全体素数，因为不超过$\sqrt{50}<8$的素数是 2，3，5，7，所以在 2，3，…，50 中，留下 2，3，5，7，依次划去 2，3，5，7 的倍数

2，3，~~4~~，5，~~6~~，7，~~8~~，~~9~~，~~10~~，
11，~~12~~，13，~~14~~，~~15~~，~~16~~，17，~~18~~，19，~~20~~，
~~21~~，~~22~~，23，~~24~~，~~25~~，~~26~~，~~27~~，~~28~~，29，~~30~~，
31，~~32~~，~~33~~，~~34~~，~~35~~，~~36~~，37，~~38~~，~~39~~，~~40~~，
41，~~42~~，43，~~44~~，~~45~~，~~46~~，47，~~48~~，~~49~~，~~50~~.

留下的数

2，3，5，7，11，13，17，19，
23，29，31，37，41，43，47.

就是不超过 50 的全体素数.

上面讲的就是著名的埃拉多斯染尼氏（Eratosthenés）筛法.早在公元前三百年左右，埃氏就提出这一方法．素数表都是根据这一方法略加变化而造出来的．埃氏筛法的改进与发展，是近代解析数论的重要工具之一.

1909 年，莱莱[①] 发表了不超过 10^7 的素数表．在表中凡$\leqslant 10\,170\,600$，而又不能被 2，3，5，7 整除的自然数，它的最小素因数都被列了出来．还有居立刻（J. F. Kulik，1793～1863），他曾造出不超过 10^8 的素数表，他的手稿存放于维也纳科学院内．1951 年，居立刻（J. P. Kulik）、波来梯与波尔特[②] 曾发表了不超过 1.1×10^7 的素数表，即在莱莱氏表的基础上增加了由 10 006 741 至

① D. N. Lehmer, Factor table for the first ten millions, Washington, Carnegie Institute, 1909.

② J. P. Kulik, L, Poletti and R. J. Porter, Liste des nombres Premiers du onzième million (plus précisément de 10, 006, 741 à 10, 999, 997), Amsterdam, 1951.

10 999 997 之间的所有素数．他们在造表过程中，用了居立刻（J. F. Kulik）的手稿．

自从有了电子计算机后，更大得多的素数表被制作出来了．1959 年，贝克尔与格伦贝尔格[1] 制成含有不超过 $p_{6\,000\,000} = 104\,395\,301$的全体素数（共 6×10^6 个素数）的微型卡片．60 年代初，美国学者就曾宣称，他们将在电子计算机的存储系统中存放前 5×10^8 个素数．

五　费马数

定理 1　如果 2^m+1 是素数，那么 $m=2^n$．

证：如果 m 有一个奇数真因数 q，那么 $m=qr$，且

$$2^m+1=2^{qr}+1=(2^r)^q+1$$
$$=(2^r+1)(2^{r(q-1)}-\cdots-2^r+1).$$

因为 $1<2^r+1<2^m+1$，所以 2^m+1 有真因数 2^r+1，即不是素数．矛盾．因此 m 不能有奇数真因数，即 $m=2^n$．定理证完．

形状是 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数叫做费马(P. Fermat)数．当 $n=0,1,2,3,4$ 时，

$$F_0=3,\ F_1=5,\ F_2=17,\ F_3=257,\ F_4=65\,537,$$

都是素数．由此，费马曾猜测，所有的费马数都是素数，即定理 1 的逆也是成立的．但是在 1732 年，欧拉(L. Euler)证明了：

$$F_5=2^{2^5}+1=641\times6\,700\,417.$$

这可以证明如下：记 $a=2^7$，$b=5$，那么 $a-b^3=3$，$1+ab-b^4=1+(a-b^3)b=1+3b=2^4$，所以 $F_5=2^{2^5}+1=(2a)^4+1=2^4\cdot a^4+1=$

[1] C. L. Backer and F. L. Gruenberger. The first six million prime numbers. The RAND Corp. Santa Monica, Pub. Microcard Foun; Madison, Wisconsin, 1959.

$(1+ab-b^4)a^4+1=(1+ab)a^4+1-a^4b^4=(1+ab)(a^4+(1-ab)(1+a^2b^2))$，即$(1+ab)\mid F_5$，而$1+ab=641$. 从而费马猜想被否定了.

目前已知许多费马数为复合数，其中最大的是 F_{23471}. 仅仅只有 $F_5,F_6,F_7,F_8,F_9,F_{11}$，我们知道它们的标准分解式. F_{14}与 F_{20}是最小的两个费马数，我们知道它们是复合数，却不知道它们的任何真因数. F_{22},F_{24},F_{28}是最小的几个我们不知其为素数或是复合数的费马数.①,②

因此在费马数中，是否有无穷多个素数？或者是否有无穷多个复合数？都是没有解决的问题.

高斯(C. F. Gauss)曾经证明过，如果 F_n 是素数，那么正 F_n 边形是可以用圆规与直尺来作图的. 这说明费马数与平面几何学的一些问题有着深刻的内在联系.

费马数有一个有趣的性质，即当 $k>0$ 时有$(F_n,F_{n+k})=1$.

事实上，设自然数 $m\mid F_n$ 及 $m\mid F_{n+k}$. 命 $a=2^{2^n}$，则利用首项为 -1，公比为 $-a$ 的几何级数的求和公式得

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+k}-2}{F_n}&=\frac{2^{2^{n+k}}-1}{2^{2^n}+1}=\frac{a^{2^k}-1}{a+1}\\&=a^{2^k-1}-a^{2^k-2}+\cdots+a-1,\end{aligned}$$

所以 $F_n\mid(F_{n+k}-2)$. 因 $m\mid F_n$，因此 $m\mid(F_{n+k}-2)$. 再由 $m\mid F_{n+k}$，即得 $m\mid 2$. 但费马数都是奇数，所以必定有 $m=1$. 于是证明了$(F_n,F_{n+k})=1$. 由此推出，在数列

$$F_0,F_1,F_2,\cdots$$

中，每个数的素因数都两两不同. 这就再次得出素数有无穷多(即定

---

① P. Ribenboim, The Book of Prime Number Records, Springer Verlag, 1989

② H. Riesel, Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, Birkhauser, 1985.

理 3.1).由此也推出了第 $n+2$ 个素数 p_{n+2}适合于

$$p_{n+2}\leqslant F_n=2^{2^n}+1.$$

设 F_n 的最大素因数为 $p(F_n)$.用数论中深刻的丢番图逼近论方法,斯梯瓦特[①]证明了存在常数 $A>0$ 使

$$p(F_n)>An2^n,\ n=1,2,\cdots.$$

六　麦什涅数

定理 1　如果 $n>1$,且 a^n-1 是素数,那么 $a=2$,且 n 是素数.

证:如果 $a>2$,又因 $n>1$,所以 $1<a-1<a^n-1$,且 $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$,所以 a^n-1有真因数$(a-1)$,即它不是素数了.因此 $a=2$.如果 n 是复合数,即 $n=kl$,其中 $1<k<n$,那么 $1<2^k-1<2^n-1$,且$(2^k-1)\mid(2^n-1)$.从而 2^n-1 也将不是素数了.所以如果 a^n-1 是素数,则必须 $a=2$ 及 n 是素数.定理证完.

形状是 $M_n=2^n-1$ 的数叫麦什涅(M. Mersenne)数.由定理 1 可知,如果 M_n 是素数,则必须 n 是素数.但反过来并不对,当 n 是素数时,M_n 不一定是素数.例如

$23\mid M_{11}, 47\mid M_{23}, 167\mid M_{83}, 263\mid M_{131}, 359\mid M_{179}$等等.

到今天为止,我们只知道 33 个麦什涅数是素数.它们是 M_p,其中 $p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607$, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9 689, 9 941, 11 213, 19 937, 21 701, 23 209, 44 497, 86 243, 110 503, 132 049, 216 091, 756 839, 858 433.从第 13 个开始,即从 M_{521}开始,都是在 1952 年以后,借助于电子计算机而陆续发现的.三中已经提到过的目前所知道的最大素数,就是

① C. L. Stewart, On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers, PLMS(将发表).

麦什涅素数 $M_{858\,433}$.

麦什涅数中是否有无穷多个素数，是一个没有解决的问题.

还有人提出过这样的猜想，即如果 M_p 是素数，那么 M_{M_p} 也是一个素数.

这个猜想对于小的麦什涅素数都是对的，但到第5个麦什涅素数 $M_{13}=8191$，这个猜想就被否定了. 借助于电子计算机，可以证明 $M_{M_{13}}=2^{8191}-1$ 是一个复合数. 这个数有2 466位，至1976年，才找到它的一个素因数

$$\begin{aligned} p &= 2\times 20\,644\,229\times M_{13}+1 \\ &= 338\,193\,759\,479. \end{aligned}$$

到1957年，有人证明了虽然 M_{17} 与 M_{19} 都是素数，但 $M_{M_{17}}$ 与 $M_{M_{19}}$ 都是复合数，它们可以分别被 $1768(2^{17}-1)+1$ 与 $120(2^{19}-1)+1$ 整除. 已知最大的麦什涅复合数为 M_q，其中

$$q=39\,051\times 2^{6001}-1.$$ [①,②]

与麦什涅数密切相关的是寻找偶完全数的问题. 所谓完全数 n，是指 n 的全部因数之和等于 $2n$ 的数. 例如6，它的因数之和是 $1+2+3+6=12$. 又如28，它的因数之和是 $1+2+4+7+14+28=56$. 所以6与28都是偶完全数.

定理2 如果 M_p 是素数，那么

$$\frac{1}{2}M_p(M_p+1)=2^{p-1}(2^p-1)$$

是一个偶完全数，而且除了这些以外，再没有其他的偶完全数.

证：我们用 $\sigma(n)$ 表示 n 的全部因数之和. 如果 M_p 是素数，

---

① R. M. Robinson, Mersenne and Fermat numbers. PAMS; 5(1954), 842～846.

② R. M. Robinson, Some factorizations of numbers of the form $2^n\pm 1$. MTAC; 11(1957), 265～268.

那么$\frac{1}{2}M_p(M_p+1)=2^{p-1}M_p=2^{p-1}(2^p-1)$的因数显然为$1,2,2^2,\cdots,2^{p-1},M_p,2M_p,\cdots,2^{p-1}M_p$，所以

$$\begin{aligned}\sigma(2^{p-1}(2^p-1))&=1+2+\cdots+2^{p-1}\\&\quad+(2^p-1)(1+2+\cdots+2^{p-1})\\&=(1+2+\cdots+2^{p-1})(1+2^p-1)\\&=2^p(2^p-1)=2\cdot2^{p-1}(2^p-1).\end{aligned}$$

即$\frac{1}{2}M_p(M_p+1)=2^{p-1}(2^p-1)$是一个偶完全数.

现在假定a是一个偶完全数，假设a的标准分解式中含2的最高方幂的次数为$n-1$. 因a为偶数，所以$n-1\geqslant1$. 又因2^{n-1}显然不是偶完全数，所以

$$a=2^{n-1}u,\ u>1,\ 2\nmid u.$$

因此a的因数为所有形如2^iv的数，其中$0\leqslant i\leqslant n-1$及$v\mid u$. 从而

$$\begin{aligned}2^nu=2a&=\sigma(a)=(1+2+\cdots+2^{n-1})\sigma(u)\\&=\sigma(u)(2^n-1).\end{aligned}$$

即得$(2^n-1)\mid2^nu$. 因$(2^n,2^n-1)=1$，所以$(2^n-1)\mid u$，即$\frac{u}{2^n-1}$是整数. 另一方面，由上面的等式得到

$$\sigma(u)=\frac{2^nu}{2^n-1}=u+\frac{u}{2^n-1}.$$

但u与$\frac{u}{2^n-1}$都是u的因数，而$\sigma(u)$又是u的所有因数的总和，所以u只有两个因数u和$\frac{u}{2^n-1}$. 因$u>1$及u至少有两个因数u与1，所以必须$\frac{u}{2^n-1}=1$. 换句话说，u是一个素数，且

$$u=2^n-1.$$

由定理1，n必须是素数. 这就证明了$a=2^{n-1}(2^n-1)=\frac{1}{2}M_n(M_n+1)$，$n$是素数. 定理证完.

这个定理说明，是否有无穷多个偶完全数的问题，即归结为是否有无穷多个麦什涅素数的问题. 由于目前共知道 33 个麦什涅素数，所以目前只知道 33 个偶完全数，其中最大的是

$$2^{858\,433}(2^{858\,433}-1).$$

但是是否存在奇完全数呢? 这是一个没有解决的问题. 借助于电子计算机可以证明：(i)若 n 为奇完全数，则 $n>10^{300}$；(ii)若 n 是一个奇完全数，则 n 必有一个大于 100 110 的素因数；(iii)若 n 为奇完全数，则 $\omega(n)\geqslant 8$，其中 $\omega(n)$ 表示 n 的互异素因数的个数[1].

最近 Joel Armengaud(1996)发现了第 34 及第 35 个 Mersenne 素数：$2^{1257787}-1$ 与 $2^{1398269}-1$.

七 特殊数列中的素数

所谓斐波那契(L. Fibonacci)数列就是由递推公式

$$u_1=u_2=1,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n(n=1,2,\cdots)$$

定义的正整数数列. 例如：$u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $u_5=5$, $u_6=8$, $u_7=13$, $u_8=21$, $\cdots$.

我们已经知道，当 $n=2,3,5,7,11,13,17,23,29,43,47$ 时，u_n 是素数，其中

$$u_{47}=2\,971\,215\,073.$$

除这 11 个素数外，我们还不知道别的 u_n 是素数，更不知道在数列 $u_n(n=1,2,\cdots)$中是否有无穷多个素数.

数列 $v_n(n=1,2,\cdots)$的定义如下：

$$v_1=1,\ v_2=3,\ v_{n+2}=v_{n+1}+v_n(n=1,2,\cdots).$$

这也叫做斐波那契数列. v_n 与 u_n 的差别仅在于初始值取得不同，即 $n=1,2$ 时，所取的值不同，以后的值都是由同样的递推公式 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ 得到的. 例如 $v_1=1$, $v_2=3$, $v_3=4$, $v_4=7$, $v_5=11$, $v_6=18$, $v_7=29$, $\cdots$.

当 $n=2,4,5,7,8,11,13,17,19,31,37,41,47,53,61,71$ 时，v_n 是素数，其中

$$v_{71}=688\ 846\ 502\ 588\ 399.$$

除这 16 个素数外，我们还不知道别的 v_n 是素数，更不知道在数列 $v_n(n=1,2,\cdots)$ 中是否有无穷多个素数.

对于 u_n 和 v_n 的最大素因数 $p(u_n)$ 和 $p(v_n)$. 斯梯瓦特证明了存在正常数 A_1 和 A_2 使

$$p(u_n)\geqslant A_1\frac{n\log n}{q(n)^{4/3}},$$

$$p(v_n)\geqslant A_2\frac{n\log n}{q(n)^{4/3}},$$

$$n=3,4,\cdots,$$

此处 $q(n)$ 表示 n 的无平方因数的因数个数.

又如在数列

$$1,11,111,1111,\cdots$$

中是否有无穷多个素数呢？这个问题也没有解决. 我们只知道很少几个这样形状的数是素数，例如 11 与

$$11\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111=\frac{10^{23}-1}{9}.\text{①}$$

八　费马小定理

假定 m 为正整数，将整数 a 表为

$$a=qm+r,$$

此处 $0\leqslant r<m$，我们称 r 为 m 除 a 后所得的余数（注意：a 可以是负的）. 在讲费马小定理以前，为了简便起见，我们先引进同余式的概念. 如果整数 a 与 b 的差 $a-b$ 是 m 的倍数，就称 a 与 b 对模 m 同

---

① M. Kraitchik, Recherches sur la théorie des nombres, 2 vols, paris, 1924～1929.

余.记为

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

实际上,a 与 b 对模 m 同余的意思,就是用 m 除 a,b 以后,所得的余数相同.如果 a 与 b 对模 m 不同余,就记为

$$a\not\equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

例如 $31\equiv -9(\mathrm{mod}10)$, $29\not\equiv 7(\mathrm{mod}8)$.

定理 1(费马) 如果 p 是素数,那么对于任何整数 a 都有

$$a^p\equiv a(\mathrm{mod}\, p).$$

证:假定 $p|a$,那么 $p|a^p$,所以 $p|(a^p-a)$.即定理成立.今后我们假定 $p\nmid a$.

显然如果 $p\nmid n$,那么 n 一定模 p 同余于

(1) $1,2,\cdots,p-1$

中的一个,这是因为用 p 除 n 后的余数总是其中之一.假定在这 $p-1$ 个数中任取两个不同的数 k_1 与 k_2,现在来证明

(2) $k_1a\not\equiv k_2a(\mathrm{mod}\, p)$.

假若(2)不成立,即 $p|(k_1a-k_2a)=(k_1-k_2)a$,那么由引理 2.2 得 $p|(k_1-k_2)$或 $p|a$.由假定 $p\nmid a$,所以 $p|(k_1-k_2)$.又由于 $1\leqslant k_1\leqslant p-1$, $1\leqslant k_2\leqslant p-1$ 及 $k_1\neq k_2$,所以 $p\nmid(k_1-k_2)$矛盾,所以(2)式成立.另一方面,如果 k 是(1)中的一个数,那么 $p\nmid ka$,因此 $p-1$ 个数

(3) $a,2a,\cdots,(p-1)a$,

模 p 分别同余于(1)中的一个数,而且(3)中的数又彼此对模 p 互不同余.又因从 $c\equiv d(\mathrm{mod}\, p)$与 $c'\equiv d'(\mathrm{mod}\, p)$可以推出 $cc'\equiv dd'(\mathrm{mod}\, p)$,所以(1)中各数相乘的积模 p 同余于(3)中各数相乘的积,因此

$$a\cdot(2a)\cdot\cdots\cdot(p-1)a\equiv 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(p-1)(\mathrm{mod}\, p),$$

$$(p-1)!\ a^{p-1}\equiv(p-1)!\ (\mathrm{mod}\, p),$$

即 $p|(p-1)!\ (a^{p-1}-1)$.因为 p 是素数及引理 2.2,所以

$p \nmid (p-1)!$. 再用引理 2.2 得 $p \mid (a^{p-1}-1)$，即得

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

定理证完.

每个奇数或者是形状 $4n+1$，或者是形状 $4n+3$. 我们已经知道形状是 $4n+3$ 的素数有无穷多(见定理 3.3). 现在我们来证明形状是 $4n+1$ 的素数也有无穷多.

定理 2　形状是 $4n+1$ 的素数有无穷多.

证：假定 m 是一个大于 1 的整数，那么 $m!$ 有因数 2，所以 $m!$ 是偶数. 因为 $m!^2+1$ 是一个大于 1 的奇数，所以它必定有一个奇素因数 p. 现在证明 p 必定是形状 $4k+1$ 的素数. 假定 $p=4k+3$，因为

$$\begin{aligned} m!^{p-1}+1 &= m!^{2(2k+1)}+1 \\ &= (m!^2+1)(m!^{2\cdot 2k} - m!^{2\cdot(2k-1)} \\ &\quad + \cdots - m!^2 + 1), \end{aligned}$$

所以

$$(m!^2+1) \mid (m!^{p-1}+1).$$

因此由 $p \mid (m!^2+1)$ 可得

$$p \mid (m!^p + m!).$$

由定理 1 可得

$$p \mid (m!^p - m!).$$

从而

$$p \mid (m!^p + m! - m!^p + m!).$$

即得

$$p \mid 2 \cdot m!.$$

因 p 是奇素数，所以 $p \nmid 2$. 因此由引理 2.2 可知 $p \mid m!$. 从而 $p \mid m!^2$. 因为 $p \mid (m!^2+1)$，所以 $p \mid 1$，矛盾. 因此对于每个自然数 $m>1$，$m!^2+1$ 的素因数 p 都是形如 $4k+1$ 的. 现在证明 $p>m$.

不然的话，如果 $p\leqslant m$，那么 $p\mid m!$，所以 $p\mid m!^2$，因而 $p\mid(m!^2+1-m!^2)$，即 $p\mid 1$. 矛盾. 所以 $p>m$. 由于 m 可以任意大，所以形状是 $4k+1$ 的素数有无穷多. 定理证完.

由定理 1 可知，如果 p 是奇素数，那么

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}.$$

但是否存在素数 p 使

$$(4)\qquad 2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$$

呢？我们仅仅知道两个这样的素数，即 1093 与 3511，而且当 $p<100000$ 时，不再有素数 p 适合于 (4) 式. 至于使 (4) 式成立的素数是仅有有限多个呢？还是无穷多个？使 (4) 式不成立的素数仅有有限多个呢？还是无穷多个？我们都不知道.

由定理 1 可知，如果 p 是素数，那么

$$(5)\qquad p\mid (1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}+1).$$

1950 年，居加 (G. Giuga) 猜测，只有当 p 是素数时，(5) 式才能成立. 这一猜想对于不超过 10^{1000} 的整数都是对的. 但我们还不能够加以证明.

九 拉格朗日定理与威尔逊定理

定理 1（拉格朗日） 假定 p 是素数，那么同余方程

$$(1)\qquad f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \equiv 0 \pmod{p},\ 1\leqslant x\leqslant p$$

的解数 $\leqslant n$，重解也计算在内. 这里 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 都是整数且 $p\nmid a_n$.

证：如果(1)没有解，那么定理已经成立. 如果 $x=a$ 是(1)的一个解，那么(1)式可以写成

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+r_1,$$

以 $x=a$ 代入得 $p\mid r_1$，所以

$$f(x)\equiv(x-a)f_1(x)(\bmod p).$$

如果 $x=a$ 又是 $f_1(x)\equiv0(\bmod p)$ 的解，那么同样可得

$$f_1(x)\equiv(x-a)f_2(x)(\bmod p).$$

这时我们称 a 做 $f(x)\equiv0(\bmod p)$ 的重解．继续下去，如果

$$f(x)\equiv(x-a)^h g_1(x)(\bmod p),$$

其中 $g_1(a)\not\equiv0(\bmod p)$，就称 a 是 $f(x)\equiv0(\bmod p)$ 的 h 重解．由证明可以看出 $g_1(x)$ 的次数是 $n-h$．

设(1)另有一解 $x=b$，那么

$$0\equiv f(b)\equiv(b-a)^h g_1(b)(\bmod p),$$

因 $p\nmid(b-a)$，所以由引理2.2可知

$$g_1(b)\equiv0(\bmod p).$$

如果 $x=b$ 是 $g_1(x)\equiv0(\bmod p)$ 的 k 重解，那么同样有

$$f(x)\equiv(x-a)^h(x-b)^k g_2(x)(\bmod p).$$

这样继续进行下去可得

$$f(x)\equiv(x-a)^h(x-b)^k\cdots(x-c)^l g(x)(\bmod p).$$

其中 $g(x)$ 的次数是 $n-h-k-\cdots-l$，且 $g(x)\equiv0(\bmod p)$ 不再有解，所以 $f(x)\equiv0(\bmod p)$ 的解数是 $h+k+\cdots+l\leqslant n$．定理证完．

由拉格朗日(J. L. Lagrange)定理立即推出下面的威尔逊(J. Wilson)定理．

定理2(威尔逊)　如果 p 是素数，那么

(2)　　$(p-1)!\equiv-1(\bmod p).$

证：由定理8.1可知同余方程

$$x^{p-1}-1\equiv0(\bmod p),1\leqslant x\leqslant p$$

有 $p-1$ 个解 $1,2,\cdots,p-1$，所以由定理1的证明可知

$$x^{p-1}-1\equiv(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))(\bmod p).$$

以 $x=0$ 代入即得

$$-1\equiv(-1)^{p-1}(p-1)!\ (\bmod p).$$

当 $p=2$ 时定理显然成立．当 $p>2$ 时，$2\mid(p-1)$，所以 $(-1)^{p-1}=1$，由上式即得（2）式．定理证完．

定理 3　大于 1 的自然数 n 为素数的充要条件是

$$(n-1)!\equiv -1\ (\bmod n). \tag{3}$$

证：由定理 2 可知，如果 $n=p$ 是素数，那么（3）式成立．现在来说明，如果（3）式成立，那么 n 必定是素数．实际上，假定 n 是复合数，即 $n=ab$，此处 $n>a>1$，那么 $a\mid(n-1)!$．由（3）式可知 $a\mid((n-1)!+1)$，即推出 $a\mid 1$．这是不可能的，所以 n 是素数．定理证完．

条件（3）虽然是判别一个自然数 n 是否素数的充要条件，但这一判别条件并没有什么应用价值．例如当 n 是一个 3 位数时，$(n-1)!+1$ 就是一个超过 100 位的数，所以计算量是非常大的．

由定理 2 出发，也可以提出这样的问题：是否有素数 p 使

$$(p-1)!+1\equiv 0\ (\bmod p^2) \tag{4}$$

成立？当 $p\leqslant 4\times 10^6$ 时，只有 5，13，563 这三个素数满足（4）式①．但我们还不知道适合于（4）式的素数是否有无穷多．

当 p 是大于 3 的素数时，$(p-1)!+1\geqslant 2(p-1)>p$，而由定理 2 又可知 $p\mid((p-1)!+1)$，因此 $(p-1)!+1$ 是复合数，即有无穷多个自然数 n 使 $n!+1$ 为复合数．但我们并不知道是否有无穷多个自然数 n 使 $n!+1$ 为素数．类似地，我们也不知道是否有无穷多个自然数 n 使 $n!-1$ 为素数．

记 p_i 为第 i 个素数．例如 $p_1=2$，$p_2=3$，$p_3=5$，…．那么，是否存在无穷多个自然数 n 使 $q_n=p_1p_2\cdots p_n+1$ 为素数呢？或者，存在无穷多个自然数 n 使 q_n 为复合数？这些问题都没有解决．例如 $p_1+1=3$，$p_1p_2+1=7$，$p_1p_2p_3+1=31$，$p_1p_2p_3p_4+1=$

---

① P. Ribenboim, The Book of Prime Number Records, Springer Verlag, 1989.

211，$p_1p_2p_3p_4p_5+1=2311$ 都是素数，但当 $n=6$，7，8 时，$p_1p_2\cdots p_n+1$ 可以分别被 59，19，347 整除，所以都是复合数.

十　表素数为两个自然数的平方和

引理 1　假定 $p=4k+1$ 是素数，那么

$$p\left|\left(\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2+1\right)\right.\right..$$

证：因 $p=4k+1$，所以 $\frac{p-1}{2}=2k$ 是偶数，从而

$$(-1)(-2)\cdots\left(-\frac{p-1}{2}\right)=(-1)^{2k}1\cdot2\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}$$

$$=1\cdot2\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}.$$

因此

$$(p-1)(p-2)\cdots\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\equiv(-1)(-2)\cdots\left(-\frac{p-1}{2}\right)$$

$$\equiv1\cdot2\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}(\bmod p),$$

即

$$\frac{p+1}{2}\left(\frac{p+1}{2}+1\right)\cdots(p-1)\equiv1\cdot2\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}(\bmod p).$$

$\left(\text{注意 } p-\frac{p-1}{2}=\frac{p+1}{2}\text{等}\right)$由此推出

$$(p-1)!\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2(\bmod p).$$

$\left(\text{注意}\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}\right)$从而

$$(p-1)!+1\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2+1((\bmod p)).$$

由定理 9.2 可知上式左端≡0(mod$p$)，所以

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2+1\equiv0(\bmod p).$$

引理证完.

引理 2 假定 p 是素数，a 是整数，且 $p \nmid a$，那么存在适合于 $x < \sqrt{p}$ 与 $y < \sqrt{p}$ 的自然数 x, y 使

$$ax + y \equiv 0 \pmod{p} \text{ 或 } ax - y \equiv 0 \pmod{p}.$$

证：用 m 表示 $\leqslant \sqrt{p}$ 的最大自然数，所以 $m + 1 > \sqrt{p}$，即得 $(m+1)^2 > p$. 当 x 与 y 分别经过 $0, 1 \cdots, m$ 时，$ax - y$ 共取 $(m+1)^2$ 个值. 因为 $(m+1)^2 > p$，所以用 p 来除这 $(m+1)^2$ 个 $ax - y$，至少有两个的余数是相同的. 假定这两个是 $ax_1 - y_1$ 与 $ax_2 - y_2$，其中 $x_1 \geqslant x_2$，并且 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 是不同的，即 $x_1 = x_2$ 与 $y_1 = y_2$ 不同时成立. 所以

$$ax_1 - y_1 \equiv ax_2 - y_2 \pmod{p}, \quad x_1 \geqslant x_2,$$

$$a(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

现在来证明 $x_1 \neq x_2$. 如果 $x_1 = x_2$，那么由 (1) 式得 $y_1 - y_2 \equiv 0 \pmod{p}$. 但因为 $0 \leqslant y_1 \leqslant m < p$, $0 \leqslant y_2 \leqslant m < p$，所以必须 $y_1 = y_2$. 这与 $ax_1 - y_1$ 及 $ax_2 - y_2$ 的定义相矛盾. 同样，如果 $y_1 = y_2$，那么

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

因 $p \nmid a$，所以由引理 2.2 得 $p \mid (x_1 - x_2)$. 同理可知 $x_1 = x_2$. 这也与 $ax_1 - y_1$ 及 $ax_2 - y_2$ 的定义相矛盾. 所以 $x_1 > x_2$, $y_1 \neq y_2$. 取

$$x_1 - x_2 = x.$$

那么 $0 < x \leqslant m \leqslant \sqrt{p}$. 因 $\sqrt{p}$ 不是整数(不然，素数 p 就是整数的平方了，这不可能)，所以 $0 < x < \sqrt{p}$. 又取

$$y = \begin{cases} y_1 - y_2, & \text{当 } y_1 > y_2, \\ y_2 - y_1, & \text{当 } y_1 < y_2, \end{cases}$$

那么 $0 < y < \sqrt{p}$. 因此用上述 x, y 代入 (1) 式，即可知

$$ax - y \equiv 0 \pmod{p} \text{ 或 } ax + y \equiv 0 \pmod{p}.$$

引理证完.

定理 1(费马) 每一个形如 $p = 4k + 1$ 的素数都可以表示成两

个自然数的平方和.

证:取 $a=\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2$.由于 a 的素因数都 $\leqslant\frac{p-1}{2}$,所以 $p\nmid a$,因此由引理 2 可知存在自然数 $x<\sqrt{p}$ 及 $y<\sqrt{p}$ 使

$$ax+y\equiv o(\mathrm{mod}\,p)\text{或 } ax-y\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

总之

$$a^2x^2-y^2\equiv(ax+y)(ax-y)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p). \tag{2}$$

由引理 1 可知

$$a^2\equiv -1(\mathrm{mod}\,p), \tag{3}$$

所以由(2),(3)即得

$$0\equiv a^2x^2-y^2\equiv -x^2-y^2(\mathrm{mod}\,p),$$

换句话说

$$x^2+y^2=kp,$$

其中 k 是一个自然数.因为 $0<x<\sqrt{p}$,$0<y<\sqrt{p}$,所以 $k=1$.定理证完.

定理 2　如果不计次序,那么将素数 p 表为两个自然数的平方和的方法是唯一的.

证:假定 p 有两种表为自然数的平方和的方法,即

$$p=x^2+y^2=x_1^2+y_1^2.$$

那么

$$\begin{aligned}p^2&=(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)\\&=(xx_1+yy_1)^2+(xy_1-x_1y)^2.\\&=(xx_1-yy_1)^2+(xy_1+x_1y)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(xx_1+yy_1)(xy_1+x_1y)&=(x^2+y^2)x_1y_1+(x_1^2+y_1^2)xy\\&=p(xy+x_1y_1).\end{aligned} \tag{5}$$

由(5)可知

$$p\mid(xx_1+yy_1)\text{或} p\mid(xy_1+x_1y).$$

假定 $p\mid(xx_1+yy_1)$，那么 $xx_1+yy_1=kp$，其中 k 是自然数.

代入(4)式第二个等式得

$$p^2=k^2p^2+(xy_1-x_1y)^2,$$

所以必须 $k=1$，即

(6) $$p=xx_1+yy_1.$$

且

(7) $$xy_1-x_1y=0.$$

因此由(6)，(7)得

$$px=x^2x_1+xy_1y=x^2x_1+y^2x_1$$
$$=(x^2+y^2)x_1=px_1.$$

即得

$$x=x_1.$$

代入(7)式得

$$y=y_1.$$

现在假定 $p\mid(xy_1+x_1y)$. 代入(4)式的第三个等式得

(8) $$p=xy_1+x_1y.$$

与

(9) $$xx_1-yy_1=0.$$

因此由(8)，(9)得

$$px=x^2y_1+xx_1y=x^2y_1+y^2y_1$$
$$=(x^2+y^2)y_1=py_1.$$

即得

$$x=y_1.$$

代入(9)式得

$$y=x_1.$$

总之，p 的两种表示法是一致的. 定理证完.

2 只有一种方法表示成两个自然数的平方和，即 $2=1^2+1^2$. 现在要问，形状是 $4k+3$ 的素数能否也表示为两个自然数的平方和呢？答案是否定的. 这是因为

$$x^2\equiv\begin{cases}0(\bmod 4), & \text{当 } 2\mid x,\\ 1(\bmod 4), & \text{当 } 2\nmid x,\end{cases}$$

所以

$$x^2+y^2\equiv\begin{cases}0(\bmod 4), & \text{当 } 2\mid x, 2\mid y,\\ 1(\bmod 4), & \text{当 } 2\mid x, 2\nmid y \text{ 或 } 2\nmid x, 2\mid y,\\ 2(\bmod 4), & \text{当 } 2\nmid x, 2\nmid y,\end{cases}$$

但是

$$4k+3\equiv 3(\bmod 4),$$

因此

$$x^2+y^2\not\equiv 4k+3(\bmod 4).$$

所以不仅是形如 $4k+3$ 的素数，而且形如 $4k+3$ 的自然数都不能表示成两个自然数的平方和.

由定理 2 可知，如果一个自然数 n 有两种方法表示为两个自然数的平方和，那么 n 一定是复合数. 例如 $2501=1^2+50^2=10^2+49^2$，所以 2501 是复合数.

将素数 p 表示为自然数的平方差的问题比较容易. 假定

$$p=x^2-y^2.$$

那么

$$p=(x+y)(x-y).$$

因为 p 的因数只有 1 与 p，所以必须

$$p=x+y, 1=x-y.$$

从而

$$x=\frac{p+1}{2}, y=\frac{p-1}{2}.$$

因此，当 p 是奇素数时，我们得仅有的把 p 分解成自然数的平方差

的表示法

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

十一　二次剩余

假定 m 是一个自然数.如果$(n,m)=1$,且同余式

$$x^2\equiv n(\bmod m)$$

有解,我们就称 n 做模 m 的二次剩余.如果上面的同余式没有解,n 就叫做模 m 的二次非剩余.

我们可以将与 m 互素,且不超过 m 的自然数分成二类.一类是模 m 的二次剩余,一类是模 m 的二次非剩余.

例如 1,2,4 是模 7 的二次剩余,而 3,5,6 是模 7 的二次非剩余.又如 1,3,4,9,10,12 是模 13 的二次剩余,而 2,5,6,7,8,11 是模 13 的二次非剩余.

当 $p=2$ 时,$1^2\equiv1(\bmod 2)$,所以每一个奇数都是模 2 的二次剩余.今后假定 $p>2$ 为奇素数,我们有下述定理.

定理 1　在 $1,2,\cdots,p-1$ 中,共有$\frac{1}{2}(p-1)$个模 p 的二次剩余,$\frac{1}{2}(p-1)$个模 p 的二次非剩余,且

(1)　　$1^2,2^2,\cdots,\left(\frac{1}{2}(p-1)\right)^2$

用 p 除所得的余数,就是模 p 的全体二次剩余.

证:用 p 除(1)中各数所得的余数,显然都是模 p 的二次剩余.现在要证明的是:$1,2,\cdots,p-1$ 中,模 p 的二次剩余也就是这些.假定 $1\leqslant n<p$.如果同余式

(2)　　$x^2\equiv n(\bmod p),1\leqslant x\leqslant p-1$

有解,那么由定理 9.1 可知它至多有二个解.由

$$(p-x)^2\equiv(-x)^2\equiv x^2\equiv n(\bmod p)$$

可知(2)还有一个解 $p-x$. 如果 $\frac{1}{2}(p-1)<x\leqslant p-1$, 那么 $1\leqslant p-x\leqslant\frac{1}{2}(p-1)$. 因此如果(2)有解, 它总会有一个解适合于

(3) $$1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(p-1).$$

换句话说, 如果 n 是模 p 的二次剩余, 那么 n 必定模 p 同余于(1)中的一个数. 因此剩下来要证明的就是 n 中是模 p 的二次剩余恰有 $\frac{1}{2}(p-1)$ 个, 这只要证(1)中的任何两个数模 p 都互不同余. 假定 a^2, b^2 是(1)中的任何二数, 且 $a>b$. 如果

$$a^2\equiv b^2(\bmod p),$$

即得

$$p\mid(a+b)(a-b).$$

由引理 2.2 可知 $p\mid(a+b)$ 或 $p\mid(a-b)$, 但 $1\leqslant a+b<p$, $1\leqslant a-b<p$, 这是不可能的. 因此(1)中任何二数都模 p 互不同余. 定理证完.

定理 2(欧拉)　有关系式

$$n^{\frac{p-1}{2}}\equiv\begin{cases}1(\bmod p), \text{当 } n \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余},\\ -1(\bmod p), \text{当 } n \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余}.\end{cases}$$

证: 假定 n 是模 p 的二次剩余, 那么同余式

$$x^2\equiv n(\bmod p)$$

有解 x, 即 $p\mid(x^2-n)$. 所以由

$$x^{p-1}-n^{\frac{p-1}{2}}=((x^2)^{\frac{p-1}{2}}-n^{\frac{p-1}{2}})$$

$$=(x^2-n)\left\{(x^2)^{\frac{p-1}{2}-1}+(x^2)^{\frac{p-1}{2}-2}n+\cdots+x^2n^{\frac{p-1}{2}-2}+n^{\frac{p-1}{2}-1}\right\},$$

可知

$$p\mid(x^{p-1}-n^{\frac{p-1}{2}}).$$

由定理 8.1 可知 $p|(x^{p-1}-1)$，因此

$$p|(x^{p-1}-1-x^{p-1}+n^{\frac{p-1}{2}}),$$

即

$$n^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p). \tag{4}$$

由定理 9.1 可知同余式(4)的解数不超过$\frac{p-1}{2}$.再由定理 1 和上面证明的事实可知它正好有$\frac{p-1}{2}$个解，即模 p 的$\frac{p-1}{2}$个二次剩余. 所以若 n 是模 p 的二次非剩余，必然不适合(4)，即 $p\nmid(n^{\frac{p-1}{2}}-1)$.但是由引理 8.1 可知

$$p|(n^{p-1}-1)=(n^{\frac{p-1}{2}}-1)(n^{\frac{p-1}{2}}+1),$$

所以由引理 2.2 可知 $p|(n^{\frac{p-1}{2}}+1)$，即

$$n^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p).$$

定理证完.

对于复合数 m，定理 1 是不对的.例如 $m=8$，模 8 的二次剩余只有 1，其余 3，5，7 都是模 8 的二次非剩余.又如 $m=15$，模 15 的二次剩余只有 1，4，其余 2，7，8，11，13，14 都是模 15 的二次非剩余.

假定 $k>2$.我们还可以类似地来定义模 m 的 k 次剩余与模 m 的 k 次非剩余如下：如果$(n,m)=1$，且同余式

$$x^k\equiv n(\bmod m)$$

有解，我们就叫 n 做模 m 的 k 次剩余.如果上面的同余式没有解，我们就叫 n 做模 m 的 k 次非剩余.

十二　素数的出现概率为零

在前面几节中，我们所讲的一些素数的性质，都是初等的算术性质. 但与素数有关的重要而深刻的结果，却都是通过分析工具而

得到的．素数论中真正引人注目的问题往往也是用分析语言提出来的．所以在下面，我们将假定读者已经熟悉有理数、实数与 x 的自然对数 $\ln x$ 的含义，并且学过极限与普通微积分，也熟悉一些分析的常用记号．在用到这方面的普通知识时，我们就不作解释了．在这一部分我们仅仅把问题与结果作一个大概的介绍，证明就不写了．有兴趣的读者可以查阅有关的专著．

命 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，即不大于 x 的最大整数．例如 $[1.5]=1, [0.1]=0, [-3.2]=-4$ 等．显然有

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

设 N 是一个正整数，那么不超过 N 而又是整数 d 的倍数的正整数个数显然等于 $\left[\frac{N}{d}\right]$．以 $\pi(N)$ 表示不超过 N 的素数的个数．例如 $\pi(10)=4, \pi(20)=8, \pi(30)=10$ 等．又假定

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_r\leqslant\sqrt{N}$$

是不超过 $\sqrt{N}$ 的全体素数．

引理1　$\pi(N)$ 有如下的表达式

$$\pi(N)=N+r-1-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]+\cdots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right].$$

证：当 $1\leqslant l\leqslant k$ 时，我们用 $\binom{k}{l}=\frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}$ 表示 k 个东西中任意选取 l 个东西的选法数目．

由引理 4.1 可知，如果自然数 $n\leqslant N$，而又是复合数，那么 n 必定被某 p_i 整除，此处 $1\leqslant i\leqslant r$．不超过 N，而又是 p_i 的倍数的整数个数是 $\left[\frac{N}{p_i}\right]$，这些整数除了 p_i 本身是素数外，当然都是复合数，所以在计算 $\pi(N)$ 时，需先从 N 中减去这些复合数的个数，即减去

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\left[\frac{N}{p_i}\right]-1\right)=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]-r.$$

但若一个整数,同时是 p_i 与 $p_j(i\neq j)$的倍数时,共被减去了二次,所以我们又必须添上一次,因此需加上

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]$$

个数.又如果一个数是 $p_ip_jp_k(i<j<k)$的倍数时,那么它被划去 $\binom{3}{1}=3$ 次,而又被添上了 $\binom{3}{2}=3$ 次,等于没减,所以必须再行减去,即共减去

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right].$$

依次类推.如果 n 恰有 k 个 $\leqslant\sqrt{N}$ 的不同的素因子,那么共减去 $\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+\cdots$ 次,共加上 $\binom{k}{2}+\binom{k}{4}+\cdots$ 次.而根据二项式定理,

$$-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\binom{k}{4}-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}$$
$$=(1-1)^k-1=-1,$$

所以只被减去 1 次.另外由于 1 不是素数,所以还需从 N 中减去 1.因此引理成立.

引理 1 的证明用了所谓"逐步淘汰原则",这是一个很有用的方法.读者如有兴趣,可参阅华罗庚著《数论导引》第一章.

设 $\varphi(n)$表示不超过 n,而又与 n 互素的自然数个数,$\varphi(n)$就是所谓的欧拉函数.例如 $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$ 等.一般说来,我们有

引理 2 $\varphi(n)=n\prod_{p\mid n}(1-\frac{1}{p})$,

其中 $\prod_{p\mid n}(1-\frac{1}{p})$表示 p 取 n 的所有不同素因数时,相应的 $1-\frac{1}{p}$ 的

连乘积.

证:设 n 的标准分解式是

$$n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}.$$

那么不与 n 互素就表示与 n 至少有一个公因数 p_i,此处 $1\leqslant i\leqslant r$,而不超过 n 又能被 p_i 整除的自然数个数为 $\frac{n}{p_i}$ $(1\leqslant i\leqslant r)$. 在计算 $\varphi(n)$时,需从 n 中减去,即需减去 $\sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i}$. 但若 n 同时被 p_i 与 $p_j(i\neq j)$整除,那么这种数被减去了二次,所以需添上一次,即需添上 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{n}{p_ip_j}$. 依次类推,得

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n-\sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots\\&\quad+(-1)^r\frac{n}{p_1p_2\cdots p_r}\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

引理证完.

由定理 3.1 已知素数的个数有无穷多,即 $\pi(N)\to\infty$(当 $N\to\infty$). 但不超过 N 的素数个数 $\pi(N)$ 与 N 的比 $\frac{\pi(N)}{N}$ 的分布情形又如何呢? 如果 $\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}$ 存在,我们就称它做素数的"出现概率". 我们将证明:

定理 1　素数的出现概率为 0,即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0.$$

由于不超过 N 的复合数个数是 $N-\pi(N)-1$,所以由定理 1 立即推出复合数的出现概率是 1,即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N-\pi(N)-1}{N}=1.$$

用数论的术语来说就是“几乎所有”的数都不是素数，而是复合数.

在证明定理 1 之前，我们再证明两条引理.

引理 3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证：
$$\sum_{n=1}^{2^t}\frac{1}{n}\quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{t-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^t}\right)$$
$$>1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^t}+\cdots\frac{1}{2^t}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$
$$=1+\frac{t}{2}\to\infty(\text{当 } t\to\infty).$$

引理证完.

引理 4 无穷乘积 $\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$，此处 p 通过所有的素数.

证：如果引理不成立. 由于 $1>1-\frac{1}{p}>0$，所以
$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=a>0.$$
从而
$$\frac{1}{a}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$
记 $N=2^t$，这里 $t=2\left(\left[\frac{1}{a}\right]+1\right)$. 所以由引理 3 的证明即得
$$\frac{1}{a}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}>\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$
$$=\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^l}\right)>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>1+\frac{t}{2}$$

$$=\left[\frac{1}{a}\right]+2>\frac{1}{a}+1,$$

即 $\frac{1}{a}>\frac{1}{a}+1$. 这是不可能的，因此引理成立.

定理 1 的证明：与引理 1 的证明相仿可知，不超过 N 的自然数中不能被前 s 个素数整除的整数个数 $\pi(N,s)$ 等于

$$\pi(N,s)=N-\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\cdots+(-1)^s\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_s}\right]$$

(注意其中 p_s 不一定表示 $\leqslant\sqrt{N}$ 的最大素数). 由于大于 p_s，而又不超过 N 的素数不能被前 s 个素数整除，所以

$$\pi(N)\leqslant s+\pi(N,s).$$

由于 $x-1<[x]<x+1$，所以

$$\pi(N)<s+N\left(1-\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\frac{1}{p_ip_j}+\cdots+(-1)^s\frac{1}{p_1p_2\cdots p_s}\right)+\left(\sum_{i=1}^{s}1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}1+\cdots+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{s-1}\leqslant s}1+1\right).$$

由于

$$\sum_{i=1}^{s}1=s,\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}1=\binom{s}{2},\cdots,\quad \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{s-1}\leqslant s}1=\binom{s}{s-1},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{s}1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}1+\cdots+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{s-1}\leqslant s}1+1<1+\binom{s}{1}+\binom{s}{2}+\cdots+\binom{s}{s-1}+1=2^s.$$

因此

$$\pi(N)<N\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^s+s$$

$$<N\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^{s+1}.$$

取 $s+1=\left[\frac{\ln N}{2\ln 2}\right]$，代入上式即得

$$0<\frac{\pi(N)}{N}<\prod_{i=1}^{\left[\frac{\ln N}{2\ln 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{2^{\frac{\ln N}{2\ln 2}}}{N}$$

$$=\prod_{i=1}^{\left[\frac{\ln N}{2\ln 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

当 $N\to\infty$时，由引理 4 即得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0.$$

定理证完.

注意：由引理 4 即可推知 $\pi(N)\to\infty$（当 $N\to\infty$）. 事实上，如果 $\pi(N)$有限，那么 $\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)$只有有限项相乘，所以不能是零. 但这一证明远较本文第三部分的方法得到的东西为多. 由它可以得到 $\pi(N)$的一个粗略估计. 这里介绍的方法是属于欧拉的.

十三 素数定理

在作进一步讨论之前，我们先引进几个近代素数论中常用的记号

$$\ll, O, o, \sim.$$

它们的含义解释如下：设 x 是一个连续趋于无穷的变量，又设 $\varphi(x)$是x 的正值函数，$f(x)$是任意函数. 如果有一个与 x 无关的正常数A 使

$$|f(x)|\leqslant A\varphi(x)$$

成立,我们就记为

$$f(x)\ll\varphi(x),\text{或 } f(x)=O(\varphi(x)).$$

这里常数 A 称为与“$\ll$”或“O”有关的常数.如果 $f(x)-g(x)\ll\varphi(x)$,我们常常记为

$$f=g+O(\varphi)$$

更为方便一些.又如果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\text{ 或 }1,$$

我们就分别记为

$$f(x)=o(\varphi(x))\text{或 } f(x)\sim\varphi(x).$$

例如 $\sin x\ll1$, $x+\frac{1}{x}\ll x\ll x+\frac{1}{x}$, $x+\frac{1}{x}=o(x^2)$, $x+\sin x\sim x$ 或 $x+\sin x=x+O(1)$等.

由于

$$e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots,$$

所以　$$e^xx^{-n}>\frac{x}{(n+1)!},$$

此处 n 为任意正整数,即 e^x 趋于无穷较 x 之任何整数次方幂为快,或谓 e^x 之无穷大阶大于 x^n 之阶.用上面的记号可以记为

$$x^n=o(e^x).$$

或 a 为任何正数,则仍有

$$x^a=O(x^{[a]+1})=o(e^x).$$

以 $\ln y$ 代入上式之 x,则

$$(\ln y)^a=o(y),$$

即得　$$\ln x=o(x^\delta),$$

此处 δ 为任意正数.换言之,$\ln x$ 之无穷大阶较 x 之任何正数方幂为小.同理 $\ln\ln x$ 的无穷大阶比 $\ln x$ 的任何正数方幂为小.又记

$$\mathrm{li}x=\lim_{\eta\to 0}\left(\int_0^{1-\eta}+\int_{1+\eta}^{x}\right)\frac{dt}{\ln t}.$$

那么

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{li}x}{\frac{x}{\ln x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{li}x)'}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)'}=\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}}=1,$$

即

$$\mathrm{li}x\sim\frac{x}{\ln x}.$$

当然在这些定义中,我们可以假定 x 是通过某一数列趋于无穷的,例如通过自然数列趋于无穷等.我们还可以将“趋于无穷”换成“趋于限 l”,这里 l 是一个有限数.例如当 $x\to 0$ 时有 $x+x^2=O(x)$, $\sin x\sim x$, $x=o(1)$等.但在以后,我们只用到趋于无穷的情况.

素数论中许多著名的猜想,都是从经验概括出来的,然后再经过严格的数学推导,设法加以证明.例如关于 $\pi(x)$,我们有下面的表:

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\mathrm{li}x$	$\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x}$	$\frac{\pi(x)}{x}$
1 000	168	145	178	0.94	0.1680
10 000	1 229	1 086	1 246	0.98	0.1229
50 000	5 133	4 621	5 167	0.993	0.1026
100 000	9 592	8 686	9 630	0.996	0.0959
500 000	41 538	38 103	41 606	0.9983	0.0830
1 000 000	78 498	72 382	78 628	0.9983	0.0785
2 000 000	148 933	137 848	149 055	0.9991	0.0745
5 000 000	348 513	324 149	348 638	0.9996	0.0697
10 000 000	664 579	620 417	664 918	0.9994	0.0665

（续表）

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\mathrm{li}x$	$\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x}$	$\frac{\pi(x)}{x}$
20 000 000	1 270 607	1 189 676	1 270 905	0.9997	0.0635
90 000 000	5 216 954	4 913 897	5 217 810	0.99983	0.0580
100 000 000	5 761 455	5 428 613	5 762 209	0.99986	0.0576
1 000 000 000	50 847 478	48 254 630	50 849 235	0.99996	0.0508

从 $\pi(x)$的最初几个函数值看来，$\pi(x)$似乎很不规则，但是随着数据的增加，从表中可以看到，对于 $\pi(x)$可能有①$\pi(x)\to\infty$（当 $x\to\infty$），即素数有无穷多，②$\frac{\pi(x)}{x}\to 0$（当 $x\to\infty$），即"几乎所有"的自然数都是复合数．这两点我们在本文第三部分与第十二部分中已经证明过了．更进一步，$\pi(x)$还可能有一个渐近表达式．勒让德(A. M. Legendre)在 1830 年猜想，当 $x\to\infty$时，

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x-B},$$

其中 $B=1.08366$．高斯又独立地建议了一个类似的，但并不与它相等的公式．以一千个相继自然数为单位，高斯的方法在于计算每个单位中的素数个数，他建议用函数$\frac{1}{\ln x}$来表示在充分大的整数 x 附近的素数分布的平均密度（"单位区间中素数的百分率"）．因此高斯猜想

$$\pi(x)\sim\mathrm{li}x.$$

如果我们仅仅只考虑主阶，由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{\ln x-1.08366}}{\dfrac{x}{\ln x}}=1\ \text{及}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{li}x}{\dfrac{x}{\ln x}}=1,$$

所以我们可以将这两个猜想写为

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x},$$

这就是通常所称的"素数定理".这是素数分布理论的中心定理.从此,决定素数定理是否正确的问题,吸引了很多优秀数学家的注意.

首先对这个问题作出重要贡献的是车比雪夫(Ц. Л. Чебышев).他在1848年与1850年证明了:

定理1(车比雪夫) 有关系式

$$a\leqslant\varliminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}\leqslant 1\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}\leqslant\frac{6}{5}a,$$

这里 $a=0.92129$.

由定理1显然推出$\frac{\pi(x)}{x}\to 0$(当 $x\to\infty$).由定理1可以看出,如果当 $x\to\infty$时,$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$的极限存在,那么极限必定是1,而且对于一切 $x\geqslant 2$,$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$一定位于两个正常数之间.尽管定理1中的常数 a 不断地被以后的数学家加以改进,但并不能导致问题的最终解决,即完全证明素数定理.

关于素数定理,赛尔凡斯特(J.J.Sylvester)曾用下面的话表明他对这个问题的展望:"但是要确定这种可能性的存在,我们或许要等待在世界上产生这样一个人,他的智慧与洞察力像车比雪夫一样,证明自己是超人一等的."

但就在赛尔凡斯特说这些话时出生的阿达玛(J. Hadamard),依赖于前人特别是黎曼(B. Riemann)的工作,用复变函数论的方法,在1896年证明了素数定理.几乎同时而又独立地证明了这个定理的还有达拉瓦勒布桑(C.J. de la Vallée Poussin).

定理 2（素数定理）$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

由定理 2 立刻可以推出

定理 3　设 p_n 表示第 n 个素数，那么

$$P_n \sim n\ln n.$$

证：在定理 2 中取 $x = p_n$ 得

$$n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\ln p_n},$$

即

$$p_n \sim n\ln p_n.$$

由于 $\ln\ln p_n = o(\ln p_n)$，所以

$$\ln p_n \sim \ln n + \ln\ln p_n \sim \ln n,$$

代入上式即得定理 3.

寻求一个"素数定理"的初等证明，即不用复变函数论或类似工具的证明，是素数论中历时很久的难题之一，这一初等证明直到 1949 年，才由赛尔贝尔格（A. Seberg）与爱多士（P. Erdös）独立得到. 有兴趣阅读车比雪夫定理与素数定理证明的读者，请看华罗庚著《数论导引》第五章与第九章.

十四　素数定理的误差项

达拉瓦勒布桑在 1899 年证明了：

定理 1（达拉瓦勒布桑）

$$\pi(x) - \mathrm{li}\,x = O(xe^{-a\sqrt{\ln x}}), \tag{1}$$

这里 $a>0$ 是一个常数.

由分部积分可得

$$\mathrm{li}\,x = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \cdots + (n-1)!\ \frac{x}{(\ln x)^n} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right). \tag{2}$$

另一方面

$$(3)\qquad \frac{x}{\ln x - B} = \frac{x}{\ln x} + \frac{Bx}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{B^{n-1}}{(\ln x)^n} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right).$$

由于 $e^{-a\sqrt{\ln x}} = o\left(\frac{1}{(\ln x)^A}\right)$，此处 $A>0$ 为任意常数，而与"o"有关的常数仅依赖于 a 与 A，所以比较(1)，(2)，(3)即得

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x - B} = \begin{cases} O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right), \text{当 } B \neq 1, \\ O\left(\frac{x}{(\ln x)^3}\right), \text{当 } B = 1. \end{cases}$$

这说明在勒让德关于 π（x）的猜测（见本文第十三部分）中，取 $B=1$ 最好，即取 $\frac{x}{\ln x - 1}$ 来逼近 π（x）最好．但不管怎样，用高斯提出的用 $\mathrm{li}x$ 来逼近 π（x）更为精密得多．

不少数学家改进了公式（1）的误差项．目前最好的结果是依·维诺格拉朵夫（И. М. Виноградов）与卡罗波夫（Н. М. Коробов）于 1958 年独立证明的．即

定理 2（依·维诺格拉朵夫——卡罗波夫）

$$(4)\qquad \pi(x) - \mathrm{li}x = O(xe^{-(\ln x)^{3/5-\varepsilon}}),$$

其中 ε 是任意正常数，而与"O"有关的常数仅依赖于 ε．

（4）式虽然比（1）式精密，但距离理想的猜想结果还相差很远．理想的猜想结果是

$$(5)\qquad \pi(x) - \mathrm{li}x = O(\sqrt{x}\ln x).$$

冯·柯赫（H. von Koch）在 1901 年曾在所谓黎曼猜测成立的情况下，证明了（5）式．由于黎曼猜测是用复变函数论的语言叙述的，在这里我们就不讲了．有兴趣的读者，请看华罗庚著《指数和的估计及其在数论中的应用》第三章．不过，由（5）的成立，也可以

推出黎曼猜测的成立．所以（5）式与黎曼猜测是等价的，因此（5）式也可以看成是黎曼猜测的另一种形式．特别应该指出，素数论中许多著名问题的解决，往往可以归结为黎曼猜测的证明．所以断定这一猜测的成立与否，在数论中实在是最为重要的了．

我们现在甚至还远远不能证明比（5）弱得多的结果，即

(6) $$\pi(x)-\operatorname{li}x=O(x^{1-\varepsilon}),$$

这里 ε 是某一正数（例如 $\varepsilon=10^{-10\,000}$，而与"$O$"有关的常数仅依赖于 ε．

关于$\pi(x)$与第 n 个素数 p_n，罗素（J. B. Rosser）与熊飞尔德（L. Schoenfeld）[①] 证明了下面的不等式：

定理 3　① $\dfrac{x}{\ln x-\dfrac{3}{2}}<\pi(x)<\dfrac{x}{\ln x-\dfrac{1}{2}}$，其中 $x\geqslant 67$，

② $n\ln n<p_n<n(\ln n+\ln\ln n)$，其中 $n\geqslant 6$．

十五　素数定理误差项的不规则性

我们先引进记号"Ω"．设 $\varphi(x)$是 x 的正值函数．如果存在与 x 无关的正常数c，使有任意大的 x 满足

$$|f(x)|>c\varphi(x),$$

我们就用记号

$$f(x)=\Omega(\varphi(x))$$

来表示．所以"Ω"是"O"的逆记号．如果 $f(x)$是 x 的实函数，即$f(x)$仅取实值，且有任意大的 x 使$f(x)>c\varphi(x)$，就记作

$$f(x)=\Omega_+(\varphi(x)).$$

又如果有任意大的 x 使$f(x)<-c\varphi(x)$，就记作

---

① J. B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math; 6 (1962), 64～94.

$$f(x)=\Omega\ \ (\varphi(x)).$$

所以对于实函数，“Ω”等价于“或者 Ω_+，或者 Ω_-”. 我们还用记号“$\Omega_\pm$”表示“Ω_+与 Ω_-都成立”.

由本文第十三部分的表中可见，似乎应该有

(1) $\pi(x)<\mathrm{li}x$.

例如 $\pi(10^9)<\mathrm{li}10^9$. 但是李特伍德(J. E. Littlewood)在 1914 年证明了：

定理 1(李特伍德) 当 $x\to\infty$时，

$$\pi(x)-\mathrm{li}x=\Omega_\pm\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\ln\ln\ln x\right).$$

从这个定理看出，可以找到任意大的 x 使(1)式成立，也可以找到任意大的 x 使(1)式不成立，即使

(2) $\pi(x)>\mathrm{li}x$

成立. 但定理 1 纯粹是一个“存在定理”. 到底在多大的范围内，就能找到使(2)成立的 x 呢？定理 1 并不能回答. 直到 1933 年，斯克斯(S. Skewes)才首先证明了有自然数 x 适合于

$$x<10^{10^{10^{10^3}}},$$

并使(2)成立. 莱莱将斯克斯的结果改进为：在 1.53×10^{1165}与 1.65×10^{1165}之间至少有 10^{500}个整数使(2)式成立. 他并证明了，在不超过 10^{20}的整数中，找不到使(2)成立的整数①.

十六 相邻两素数之差

设 p_n 表示第 n 个素数，现在我们来研究相邻两素数 p_{n+1}与 p_n 的差

① D. H. Lehmer, On the difference $\pi(x)-\mathrm{li}x$, *Acta Arith*; 1966, 397～410.

$$d_n = p_{n+1} - p_n$$

的分布问题.

有所谓贝特朗(J. Bertrand)假设，即对于任何自然数 $m>3$，在 m 与 $2m-2$ 之间一定有一个素数. 这一著名假设是车比雪夫在1850年解决的. 取 $m=p_n(n\geqslant 3)$，则由贝特朗假设可知 $p_{n+1}<2m-2$，所以

$$d_n < 2m-2-m = m-2 = p_n - 2.$$

因此这一结果远较定理3.2精密. 但另一方面，此定理的精确性并不算好，还有更精密的结果.

关于 d_n 的重要问题与结果，有下面这些.

1. 最重要的是设法找函数 $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 使

$$d_n \leqslant f_1(n)$$

与

$$d_n \geqslant f_2(n)$$

对于所有充分大的 n 成立，其中要求 $f_2(n)$ 是最大的函数.

由目前具有最精密误差项的素数定理(定理14.2)只能推出

(1)　$f_1(n) = p_n e^{-(\ln p_n)^{3/5-\varepsilon}}$.

需假定黎曼猜测成立，即由公式(15.5)(本文第十五部分公式(15))才能得到

(2)　$f_1(n) = cp_n^{1/2}\ln p_n$.

首先是霍海赛尔(G. Hoheisel)证明了：

(3)　$f_1(n) = cp_n^{\frac{32999}{33000}}$.

当然(3)比(1)强多了. 不少数学家改进了霍海赛尔的结果. 目前最好的结果是莫绍切(C. J. Mozzochi)证明的. 他得到了：

定理 1 (莫绍切)[①] $d_n \ll p_n^{\frac{11}{20}-\frac{1}{384}+\varepsilon}$，这里 ε 是任意正常数，而与“$\ll$”有关的常数仅依赖于 ε.

由定理 1 立刻推知，对于任何 $\varepsilon>0$，皆存在仅依赖于 ε 的常数 $n_0(\varepsilon)$，当 $n>n_0$ 时，在 n 与 $n+n^{\frac{11}{20}-\frac{1}{384}+\varepsilon}$ 之间恒存在一个素数. 这一结论远比贝特朗假设为优.

关于 $f_2(n)$，我们还一无所知，如果所谓孪生素数猜想正确，就能得到

$$f_2(n)=2$$

(见本文第十九部分).

关于 $f_1(n)$ 的理想猜想结果，从现有的素数表中看，似乎应该是(2). 但数理统计学家克拉梅尔(H. Cramér)借助一个以概率论为基础的富有启发性的方法推测，甚至可能是

$$f_1(n)=c(\ln p_n)^2.$$

2. 另一类问题是设法寻找函数 $f_3(n)$ 与 $f_4(n)$，使对于无穷多个 n 有

$$d_n \leqslant f_3(n),$$

又对于无穷多个 n 有

$$d_n \geqslant f_4(n).$$

我们有下面的结果：

定理 2(梅耶)[②]

$$f_3(n)=0.248\ln p_n.$$

定理 3(兰肯 A. E. Rankin)

---

① C. J. Mozzochi, On The difference between consecutive primes, J. Number theory, 24 (1986), 181～187.

② H. Maier, Primes in short interval, Michigan Math. J. 32(1985), 221～225.

$$f_4(n)=(\frac{1}{3}-\varepsilon)\ln p_n \ln\ln p_n \frac{\ln\ln\ln\ln p_n}{(\ln\ln\ln p_n)^2},$$

其中 ε 是任意正常数.

3.还有一类问题是寻找函数 $f_5(n)$,使对于几乎所有的 n 都有

$$d_n \leqslant f_5(n),$$

即适合于 $n \leqslant x$ 的自然数 n 使上式成立的个数 $\sim x$. 还要寻找 $f_6(n)$,使对于几乎所有的 n 都有

$$d_n \geqslant f_6(n).$$

我们有下面的结果:

定理 4(克拉梅尔)　在黎曼猜测真确的假定下有

$$f_5(n)=(\ln p_n)^3.$$

定理 5(帕拉哈 K. Prachar)

$$f_6(n)=\frac{\ln p_n}{g(p_n)},$$

其中 $g(x)$ 是任何递增且适合于 $g(x)\to\infty$ 与 $\frac{\ln x}{g(x)}\to\infty$(当 $x\to\infty$)的函数.

十七　素数在算术级数中的分布

任何奇数一定 4 除余 1 或 4 除余 3,因此可以将奇数按 4 除余 1 或 4 除余 3 分为二类:

(1)　　$1,5,9,13,17,21,\cdots$

(2)　　$3,7,11,15,19,23,\cdots$

我们在第三部分与第八部分已经证明了在数列(1)与(2)中都含有无穷多个素数(见定理 3.3 与定理 8.2). 现在要问对于一般的以自然数 l 为首项,以自然数 $k(\geqslant l)$ 为公差的算术级数(或叫做等差级数)

(3)　　$l, l+k, l+2k, l+3k,\cdots$

中,是不是都含有无穷多个素数呢?

如果$(l,k)=d>1$，那么$d\mid(l+nk)(n=0,1,2,\cdots)$，所以除$l$可能是素数外，算术级数(3)中的其他数都是复合数，因此如果在数列(3)中有无穷多个素数，就必需$(l,k)=1$. 但是对于任何适合于$(l,k)=1$的正整数l,k，算术级数(3)中是不是一定有无穷多个素数呢？这一十分重要而又困难的问题是狄里赫勒(P. G. Lejeune Dirichlet)在1837年解决的，答案是肯定的.

设$\pi(x,k,l)$表示算术级数(3)中$\leqslant x$的素数个数.

定理1（狄里赫勒）　如果$(l,k)=1$，那么$\pi(x,k,l)\to\infty$（当$x\to\infty$）.

定理1原来的证明需要一些高深的数学知识，它的"初等证明"也是赛尔贝尔格在1949年得到的. 有兴趣阅读定理1的初等证明的读者，请看华罗庚著《数论导引》第九章.

设$l_1,\cdots,l_{\varphi(k)}$是全体不超过$k$，而与$k$互素的自然数，这里$\varphi(k)$是欧拉函数（见本文第十二部分）. 现在提一个问题. 问

$$\pi(x,k,l_1),\cdots,\pi(x,k,l_{\varphi(k)})$$

是不是都两两渐近地相等？即对于任何$i\neq j$，关系式

$$\pi(x,k,l_i)\sim\pi(x,k,l_j)$$

是不是都成立？答案也是肯定的. 这说明不超过x的素数在$\varphi(k)$个算术级数$l_i+nk(1\leqslant i\leqslant\varphi(k),\ n=0,1,2,\cdots)$中是"平均"分配的. 不仅如此，用与第十四部分相类似的方法还可以进一步证明：

定理2　$\pi(x,k,l)=\dfrac{1}{\varphi(k)}\mathrm{li}x+O(xe^{-(\ln x)^{3/5-\varepsilon}}),\ (l,k)=1,$

这里ε是任意正常数，而与"O"有关的常数依赖于k与ε.

与$\pi(x)$一样，关于$\pi(x,k,l)$的理想的猜想结果应该是：

$$\pi(x,k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\mathrm{li}x+O(x^{\frac{1}{2}}\ln x),\ (l,k)=1, \tag{4}$$

其中与"O"有关的常数与k,l无关. 因为当$k=1$时，$\pi(x,1,1)=$

$\pi(x)$，所以要证明公式(4)比证明(14.5)更加困难. 与第十六部分相类似，我们还可以证明：

定理 3 命 $p_n(k,l)$ 表示当 $(l,k)=1$ 时，数列(3)中的第 n 个素数，那么

$$p_{n+1}(k,l)-p_n(k,l)=O(p_n(k,l)^{\frac{11}{20}-\frac{1}{384}+\epsilon}),$$

其中 ϵ 是任何正常数，而与"O"有关的常数仅依赖于 k 与 ϵ.

定理 2 是对于固定的 k 而得到的. 是不是有一个 $\pi(x,k,l)$ 的与 k 无关的渐近表示公式呢？这是很重要的问题，关于这个问题，济格尔(C. L. Siegel)证明了：

定理 4 (济格尔) 设 l,k 是适合于 $(l,k)=1$ 及 $3\leqslant k\leqslant(\ln x)^K$ 的自然数，其中 K 是任意正常数，那么

$$\pi(x,k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\mathrm{li}\,x+O(xe^{-a\sqrt{\ln x}}),$$

这里 $a>0$，而与"O"有关的常数仅依赖于 k.

另一个有趣而重要的问题是如何估计算术级数(3)中的最小素数 $p_1(k,l)$ 的上界. 邱拉(S. Chowla)猜测，当 $(l,k)=1$ 时，对于任何 $\epsilon>0$，都有

$$p_1(k,l)=O(k^{1+\epsilon}),$$

其中与"O"有关的常数仅依赖于 ϵ.

假定公式(4)成立，那么用 $x=k^{2+\epsilon}$ 代入，容易推出

$$p_1(k,l)=O(k^{2+\epsilon}),\ (l,k)=1,$$

其中与"O"有关的常数仅依赖于 ϵ. 但公式(4)是未经证明的. 林尼克(Ю. В. линник)首先迈出了重要的一步，他证明了：

定理 5 (林尼克) 当 $(l,k)=1$ 时，$p_1(l,k)\ll k^c$，这里 c 是一个正常数.

我国数学家潘承洞首先证明了 c 是可以具体定出来的. 他证明了 $c\leqslant 5\,448$. 我国数学家陈景润证明过 $c\leqslant 168$. 目前已发表的最佳

结果是希斯—仆朗证明的 $c\leqslant 5.5$[①].

1965 年,朋比尼(E. Bombieri)证明了下面关于 $\pi(x,k,l)$ 重要的中值公式:

定理 6 (朋比尼)[②] 对于任意常数 $A>0$,都存在常数 $B>0$ 使

$$(5)\quad \sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{2}}/(\ln x)^{B}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right),$$

这里 $\max\limits_{(l,k)=1}\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)}\right|$ 表示适合于 $(l,k)=1$ 的 $\varphi(k)$ 个 $\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)}\right|$ 中最大的一个.

定理 6 稍弱的形式是阿·维诺格拉朵夫(A. N. Виноградов)独立证明的[③]. 我们容易证明,如果(4)式成立,那么定理 6 是显然成立的. 因为取 $B=A+1$,将(4)代入(5)的左端即得

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{2}}/(\ln x)^{B}}O(x^{\frac{1}{2}}\ln x)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{B-1}}\right)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A}}\right).$$

公式(4)与所谓的广义黎曼猜测是等价的. 但在不少情况下,当需要用到公式(4)时,我们可以用(5)来代替. 这正是定理 6 的重要之处.

十八 哥德巴赫问题

哥德巴赫(C. Goldbach)问题是 1742 年他写信给欧拉时提出来的. 在信中,他提出了将整数表示为素数之和的猜想. 这个猜想可以用略为修改了的语言叙述为:

(A)每一个≥6 的偶数都是两个奇素数之和.

---

① D R. Heath-Brown, Zero free regions for DirichletL functions and the least prime in an arithmetic progression, PLMS 64(1992), 265~338.

② E. Bombieri, On the Large Sieve, *Mathematika*; 12, 2(1965), 201~225.

③ A. И. Виноградов, Оплотностной гипотезе для L-рядов дирихле, ИАН СССР, сер. Мат; 29(1965), 903~934.

(B)每一个$\geqslant 9$的奇数都是三个奇素数之和.

例如$20=3+17, 22=11+11, 29=3+7+19, 31=5+7+19$等.

显然,命题(B)是命题(A)的推论.事实上,如果命题(A)成立,那么对N是任何奇数$\geqslant 9$(即$N-3$是偶数且$\geqslant 6$),由命题(A)的成立可知有奇素数q_1与q_2使

$$N-3=q_1+q_2,$$

所以

$$N=3+q_1+q_2.$$

因此命题（B）也成立，这说明命题（A）是最本质的.

从哥德巴赫写信起到今天，已经积累了不少关于该问题的宝贵资料．例如皮平（N. Pipping）核对过，当偶数$n\leqslant 10^5$时，命题（A）是正确的．以后，申氏[①]与尹定[②]又分别进一步核对了，当偶数$n\leqslant 3.3\times 10^7$及$n\leqslant 3\times 10^8$时，命题（A）都是对的．但是至今我们还不能确定这两个命题的真假.

1900年，希尔伯特（D. Hilbert）在第二届国际数学会的著名演讲中，把黎曼猜测、哥德巴赫猜测（A）与孪生素数猜测，作为19世纪最重要的未解决问题之一，介绍给20世纪的数学家来解决，即所谓希尔伯特第八问题.

在1912年召开的第五届国际数学会上，朗道（E. Landau）曾经说过，即使要证明下面较弱的命题（C），也是现代数学家所力不能及的.

（C）存在一个正整数c，使每一个$\geqslant 2$的整数都可以表示为不超过c个素数之和.

---

① Shen Mok Kong, On Checking the Goldbach Conjecture, Novdisk, Tidskr, Infor; -Behand; 4 (1964).

② 尹定,小于3亿的全部偶数均为哥德巴赫数,科学通报,18(1984),1150.

注意：如果命题（A）成立，那么命题（C）显然也成立，而且 $c=3$.

1921 年，哈代（G. H. Hardy）在哥本哈根召开的数学会上说过，命题（A）的困难程度是可以和任何没有解决的数学问题相比的.

设 $r_2(N)$ 为将偶数 N 表为两个素数之和的表示法个数，又设 $r_3(N)$ 为将奇数 N 表成三个素数之和的表示法个数. 例如

$$10=3+7=7+3=5+5,\quad 12=5+7=7+5,$$

$$11=3+3+5=3+5+3=5+3+3,$$

所以 $r_2(10)=3$, $r_2(12)=2$, $r_3(11)=3$ 等.

哈代与李特伍德在 1922 年还进一步猜测：

(D) $$r_2(N)=2\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{N}{(\ln N)^2}(1+o(1)),\text{当 } 2\mid N.$$

(E) $$r_3(N)=\frac{1}{2}\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{N^2}{(\ln N)^3}(1+o(1)),\text{当 } 2\nmid N.$$

命题（A），（B）是哥德巴赫问题原始的算术语言提法，而命题（D），（E）则是哥德巴赫问题的分析语言的提法，命题（D），（E）比命题（A），（B）更加深刻. 由它们不仅能推出对于充分大的整数，命题（A），（B）都成立，而且给出了充分大的整数表为素数和的表示法个数的渐近公式.

近 70 年来，哥德巴赫问题吸引了世界上很多著名数学家来研究它. 取得了很好的成绩. 研究哥德巴赫问题产生的研究方法不仅对数论有广泛应用，而且也可以用到不少其他数学分支中去.

我国著名数学家华罗庚早在 30 年代就开始研究这一问题，并得到了重要成果. 解放后，在他的倡议与领导下，我国青年数学工

作者，从50年代初，就开始研究这一问题，他的学生们不断得到重要成果，获得国内外的高度评价，特别是陈景润的结果尤为突出.

我们将在下面介绍这个问题的一些重要结果.

首先是史尼尔曼（Л. Г. Шнирельман）在1930年（哥德巴赫提出猜想后的188年）证明了命题（C），即：

定理1（史尼尔曼） 任何$\geqslant 2$的整数都可以表示为不超过c个素数之和，这里c是一个常数.

史尼尔曼不仅证明了命题（C），而且在他的论文中，引入了关于自然数集合很重要的概念——“密率”. 这一概念后来有了广泛发展与应用.

命s表示最小的正整数，使每一充分大的整数都可以表示成为不超过s个素数之和，我们称s做史尼尔曼常数. 史尼尔曼的方法不仅能够得到s的存在性，而且可以得到s的明确上界. 由他的方法给出$s\leqslant 800\,000$. 不少数学家改进了s的上界估计. 例如我国数学家尹文霖就在1956年证明过$s\leqslant 18$. 目前关于s的最佳估计是沃恩（R. C. Vaugham）得到的，他证明了：

定理2（沃恩）[①,②] （1）每一充分大的奇数是不超过5个素数之和.（2）每一个$\geqslant 2$的整数都是不超过27个素数之和.

哈代与李特伍德在这一世纪的20年代，系统地开创与发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法，这个方法就是著名的“圆法”. 他们在未经证明的广义黎曼猜测成立的假定下（即假定公式（17.

---

① R. C. Vangham, A note on Schirel'man's approach to Goldbach's Problem, BLMS; 8, 3, 24 (1976), 245～250.

② R. C. Vaugham, On the estimation of Schirel'man's Constant, J *für reine* and *ang. Math*; 290 (1977), 94～108.

4) 成立)，证明了命题 (E)．为了取消他们证明中用到的未经证明的猜测，就需要估计某种类型的“指数和”．在 30 年代，依·维诺格拉朵夫创造了一系列估计指数和的重要方法，从而使他在 1937 年证明了命题 (E)．当然由此推出命题 (B) 对于充分大的奇数都成立，即

定理 3 (依·维诺格拉朵夫) 设 N 是奇数，那么

$$r_3(N)=\frac{1}{2}\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{N^2}{(\ln N)^3}(1+o(1)).$$

由此推出，每一充分大的奇数都是三个奇素数之和．

巴雷德金 (К. Г. Бороздкий) 算过，当奇数 $n\geqslant e^{e^{16.038}}$ (这个数共 4 008 600 位) 时，就能表示成为三个奇素数之和．换句话说，除掉适合于 $n\leqslant e^{e^{16.038}}$ 的有限多个奇数外，命题 (B) 都成立．但 $e^{e^{16.038}}$ 这个数实在太大了，无法逐一验证对小于它的奇数来说命题 (B) 是否成立，所以说命题 (B) 是基本上被证明了．

假定 N 是充分大的偶数，那么 $N-3$ 是充分大的奇数．由定理 3 可知

$$N-3=q_1+q_2+q_3,$$

这里 q_1，q_2，q_3 是奇素数，所以

$$N=3+q_1+q_2+q_3.$$

即充分大的偶数都可以表示为不超过 4 个素数之和．所以由定理 3 可以推出史尼尔曼常数 $s\leqslant 4$．这是史尼尔曼方法所达不到的 (史尼尔曼方法目前只能证明 $s\leqslant 6$，请比较定理 2)．

1938 年，我国著名数学家华罗庚及一些外国数学家独立地证明了命题 (A) 对于几乎所有的偶数都成立．即假设 $M(x)$ 表示不超过 x，而又不能表示成为两个素数之和的偶数个数，那么

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0.$$

换句话说，使命题（A）成立的偶数的“出现概率”等于1．华罗庚证明的结果比其他人的更强一些，他证明了：

定理4（华罗庚） 设k是任何一个固定的自然数，则几乎所有的偶数都可以表成$p_1+p_2^k$，此处p_1，p_2都是素数．

另一个研究哥德巴赫问题的方法是筛法．最原始的筛法就是埃拉多斯染尼氏筛法．布朗（V．Brun）与赛尔贝尔格曾先后对这个方法作出过重要贡献．用筛法来处理命题（A）时，需将命题（A）中的素数换成“殆素数”．所谓殆素数就是素因数（包括相同的与相异的）的个数不超过某一固定常数的自然数．例如$6=2\times3$，$8=2\times2\times2$，$10=2\times5$，$12=2\times2\times3$，$21=3\times7$，所以6，10，21是素因数个数不超过2的殆素数．6，8，10，12，21都是素因数个数不超过3的殆素数．凡是素数显然都是殆素数．

为叙述简单起见，引入下面两个命题：

（F）每一个充分大的偶数都是素因数个数分别不超过a与b的两个殆素数之和．记为（a，b）．

（G）每一个充分大的偶数都可以表示为一个素数与一个素因数个数不超过c的殆素数之和．记为（1，c）．

在命题（F）中取$a=1$，即得命题（G）．但是因为处理这两个命题所用的方法有些差异，所以我们还是分开写．处理命题（F）用的是初等方法，但处理命题（G）时，还需要高深分析的工具，即用到复变函数论．哥德巴赫猜想，即命题（A），本质上就是要证明（1，1）成立．

首先是布朗在1920年证明了（9，9），即：

定理5（布朗） 每一充分大的偶数都可以表示为素因数个数都不超过9的两个殆素数之和．

关于命题（G），首先是瑞尼（A. Renyi）在 1948 年证明了（1，c），即：

定理 6（瑞尼） 存在一个正常数 c，使每一充分大的偶数都可以表示为一个素数与一个素因数个数不超过 c 的殆素数之和.

不少数学家改进了布朗与瑞尼的结果．拉代马哈（H. Rademacher）在 1924 年证明了（7，7），埃斯特曼（T. Estermann）于 1932 年证明（6，6）．布赫夕塔布（A. A. Бухштаб）又于 1938 年及 1940 年分别证明了（5，5）与（4，4）．笔者于 1956 年证明了（3，4）．同年阿·维诺格拉朵夫证明了（3，3）．1957 年，笔者又证明了（2，3）．关于命题（G），1962 年，潘承洞独立证明了（1，5）．1963 年，潘承洞与巴尔巴恩（M. Б. Барбан）又独立证明了（1，4）．1965 年，阿·维诺格拉朵夫，布赫夕塔布与朋比尼都证明了（1，3）．1966 年，我国著名数学家陈景润在对筛法作了新的重要改进之后，终于证明了（1，2），即：

定理 7（陈景润）[①] 每一个充分大的偶数都是一个素数与一个素因数个数不超过 2 的殆素数之和.

换句话说，命题（F）与（G）的研究已告结束．因此关于哥德巴赫问题，现在剩下需要研究的就只有命题（A）与（D）了.

埃氏筛法在近 60 年来被改进后，首先是用来处理哥德巴赫问题的．但这种改进后的筛法是有广泛应用的，最直接的应用就是用于素数论．只要将困难问题中的素数换成殆素数，例如将命题（A）换成命题（F），（G），就有可能用筛法来进行处理了.

由于最近关心哥德巴赫问题的人比较多，所以我们这里介绍得

---

① 陈景润，大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和，科学通报，17（1966），385～386；中国科学，2（1973），111～128 参看潘承洞，丁夏畦与王元，表大偶为一个素数及一个殆素数之和，科学通报，8（1975），358～360.

稍详细些．有兴趣更进一步了解史尼尔曼密率方法，圆法与筛法处理哥德巴赫问题的读者，请看华罗庚著《指数和的估计及其在数论中的应用》第一章与第五章．

十九　孪生素数问题

3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；…；101，103；…；10 016 957，10 016 959；…；10^9+7，10^9+9；…这些素数对中二者相差都是 2．假定 p 是素数，而 $p+2$ 也是素数，我们就称 $(p,\ p+2)$是一对孪生素数．

很久以前，人们就问孪生素数对是否有无穷多？但是至今还不能回答这个问题．

人们积累了很多宝贵的资料说明，似乎应该有无穷多对孪生素数．这就叫做孪生素数猜想．例如已知小于 10^5 的自然数中，有 1 224对孪生素数，小于 10^6 时，有 8 164 对孪生素数，而小于 3.3×10^7 时，共有 152 892 对孪生素数．现在已知小于 10^{11}，共有 224 376 048对孪生素数，而且目前所知道的最大的孪生素数对是：

$$107\ 570\ 463\times10^{2\ 250}\pm1，共 2\ 259 位[1].$$

假如孪生素数对真有无穷多，那么在本文第十六部分提出的一个问题，即寻找函数 $f_2(n)$，使当 n 充分大时有

$$d_n=p_{n+1}-p_n\geqslant f_2(n),$$

就得到了彻底的解决，即

$$f_2(n)=2.$$

设 $Z(x)$ 表示不超过 x 的自然数中孪生素数的对数．例如 $Z(20)=4, Z(10^5)=1\ 224, Z(3.3\times10^7)=152\ 892$等．所谓孪生素

[1] P Ribenboim, The Book of Prime Number Records, Springer Verlag, 1989.

数猜想即要证明：

(1) $Z(x)\to\infty$（当 $x\to\infty$）.

哈代与李特伍德在 1922 年，进一步猜想关系式

(2) $Z(x)\sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{(\ln x)^2}(1+o(1))$

应该成立. 哈代与李特伍德猜想相当于孪生素数定理. 公式（2）中的常数取值

$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=0.6601\cdots$$

不少宝贵的数据似乎支持公式（2）是对的.

孪生素数猜想也是素数论的中心问题之一. 设 a，b，c 为整数，我们还可以研究方程

(3) $ax+by=c$

存在素数解 x，y 或存在无穷多组素数解的问题. 取 $a=1$，$b=1$，$c\geqslant 6$ 为偶数即得哥德巴赫问题（见本文第十八部分，命题（A））. 又取 $a=1$，$b=-1$，$c=2$ 即得孪生素数问题.

目前，从筛法的角度看，哥德巴赫问题与孪生素数问题是“姊妹问题”，往往用同一方法可以得到两个问题相类似的结果. 用筛法也得到了关于孪生素数猜想一些很好的结果. 例如：

定理 1（布朗） 级数 $\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}$ 收敛，此处 p^* 经过所有的孪生素数.

如果级数 $\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}$ 发散，那么孪生素数对数有无穷多的猜想就得到证明了. 但是很遗憾，由 $\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}$ 的收敛，并不能得出孪生素数对数有限或无穷的结论.

定理 2（陈景润） 存在无穷多个素数 p，使 $p+2$ 为素因数

个数不超过 2 的殆素数.

5, 7, 11; 11, 13, 17; 17, 19, 23; …; 101, 103, 107; …; 10 014 491, 10 014 493, 10 014 497; …都是一些相差各等于 2 与 4 的素数组. 假定 p 是素数, 而 $p+2$ 与 $p+6$ 也都是素数, 我们就叫 (p, $p+2$, $p+6$) 是一个三生素数组. 由这些数据, 似乎建议三生素数组应该有无穷多, 这就是三生素数猜想. 这比孪生素数猜想更难. 我们也可以有类似哈代与李特伍德猜想 (2) 的三生素数定理的猜想.

更一般些, 假定 $n>1$ 及 $l_1<\cdots<l_{n-1}$是 $n-1$ 个自然数. 假定 p 是素数, 且 $p+l_1$, …, $p+l_{n-1}$都是素数, 我们就称

(4) $$(p,\ p+l_1,\ \cdots,\ p+l_{n-1})$$

是一个 n 生素数组.

我们有下面的猜想, 如果对于任意素数 q, n 个整数 0, l_1, …, l_{n-1}模 q 互不同余的个数都小于q, 那么 n 生素数组 (4) 就有无穷多. 这一猜想叫 n 生素数猜想. 我们也可以有 n 生素数定理的猜测. 取 $n=2$, $l_1=2$ 即得孪生素数猜想, 又取 $n=3$, $l_1=2$, $l_2=6$ 即得三生素数猜想, 所以 n 生素数猜想是包有孪生素数猜想与三生素数猜想作为特例的.

在平面几何中, 我们都知道, 一个三角形的任意两边之和必大于第三边, 这就是三角不等式. 在数学中有不少这类不等式. 关于 π (x), 也有这样的猜想, 即对于自然数 $x>1$, $y>1$ 总有

(5) $$\pi(x)+\pi(y)\geqslant\pi(x+y).$$

朗道曾经证明过当 $x=y$ 充分大时, 猜想 (5) 是对的. 近年来, 汉斯勒与黎加尔斯[①] 借助于电子计算机证明, 猜想 (5) 与 n 生素

① D. Hensley and I. Richards, On the incompartibility of two conjectures concerning primes, Proc. Symp. Pure Math.; 24 (1973), 123—127.

数猜想是互相矛盾的，即这两个猜想至少有一个不成立，也许猜想(5)不成立的可能性更大一些.

二十　华林—哥德巴赫问题

比哥德巴赫问题更广，有所谓华林(E.Waring)—哥德巴赫问题. 设 k 是一个自然数. 给出自然数 N，问以素数为变量的方程

(1) $$p_1^k+\cdots+p_s^k=N$$

在什么条件下有解？又在什么条件下有解数的渐近公式？这个问题就叫做华林—哥德巴赫问题.

当 $k=1$，$s=2$，$N\geqslant 6$ 为偶数及当 $k=1$，$s=3$，$N\geqslant 9$ 为奇数，我们就分别得到关于偶数与奇数的哥德巴赫猜测(见本文第十八部分，命题(A)，(B)，(D)，(E)).

我国著名数学家华罗庚系统地研究了这个问题，获得了很突出的成就. 他的结果汇集在他的专著《堆垒素数论》(科学出版社，1963)之中，我们现在仅举其中的几个结果.

1. 假定

(2) $$s\geqslant\begin{cases}2^k+1, \text{当 } 1\leqslant k\leqslant 10,\\ 2k^2(2\ln k+\ln\ln k+2.5), \text{当 } k>10.\end{cases}$$

设 $p^\theta \parallel k$(即 $p^\theta\mid k$，而 $P^{\theta+1}\nmid k$)及

$$K=\prod_{(p-1)\mid k}p^\gamma,$$

其中 p 表示表素数及

$$\gamma=\begin{cases}\theta+2, \text{当 } p=2, \text{而 } 2\mid k,\\ \theta+1, \text{其他情形}.\end{cases}$$

在上述假定下，我们有：

定理1(华罗庚)　每一充分大的适合于同余式

$$N\equiv s\pmod K$$

的正整数 N 都可以表示为 s 个素数的 k 次方幂之和，即方程（1）有解，而且方程（1）的解数有一个渐近公式．（在此就不具体写了）

例1　取 $k=1$，$s=3$，那么 $(2-1)\mid 1$，$(p-1)\nmid 1$ $(p>2)$，所以 k 中只有一个素因数2．而且 $\theta=0$，所以 $K=2$．从而由定理1可知，每一充分大的奇数 N 都是三个素数之和，而且 $N=q_1+q_2+q_3$ 的素数解 (q_1, q_2, q_3) 的个数有一个渐近表达式．这就是关于哥德巴赫问题的依·维诺格拉朵夫定理（见定理18.3）．

例2　取 $k=2$，$s=5$，那么 K 中只有素因数2和3，所以 $k=2^3\times 3=24$．从而每一充分大的模24同余于5的正整数都是5个素数的平方和，而且有解数的渐近公式．

例3　取 $k=3$，$s=9$，那么 K 中只有素因数2，所以 $K=2$．从而每一充分大的奇数都是9个素数的立方和，而且有解数的渐近公式．

2．如果仅仅只要求方程（1）有解，而不要求有解数的渐近公式，那么对 s 的要求还可以大大降低．命 $H(k)$ 表示具有下述性质的最小整数 s，它使每个充分大的 $\equiv s \pmod K$ 的整数都能表成 s 个素数的 k 次方幂之和．关于 $H(k)$ 的具体表达式，在这里就不写了．但 $H(k)$ 适合于 $H(k)\sim 4k\ln k$ $(k\to\infty)$．

定理2（华罗庚）　假定 $s\geqslant H(k)$，那么每一适合于 $N\equiv s \pmod K$ 的充分大的整数 N 都可以表示成 s 个素数的 k 次方幂之和．

定理3（华罗庚）　当 $4\leqslant k\leqslant 8$ 时有 $H(4)\leqslant 15$，$H(5)\leqslant 25$，$H(6)\leqslant 37$，$H(7)\leqslant 55$ 及 $H(8)\leqslant 75$．

给予正整数组 $N_1, \cdots, N_k$ 之后，我们还可以进一步研究以素数 $p_1, \cdots, p_s$ 为变量的方程组

$$(3)\qquad \begin{cases} p_1^k + \cdots + p_s^k = N_k, \\ p_1^{k-1} + \cdots + p_s^{k-1} = N_{k-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1 + \cdots + p_s = N_1. \end{cases}$$

在什么条件下（3）有解？在什么条件下有解数的渐近公式呢？这个问题也获得了与前面一个方程相类似的圆满结果.

还可以考虑更广泛的问题. 有兴趣的读者请看华罗庚著《堆垒素数论》.

二十一　多项式与素数

由上面讲的一些材料，多少可以看出，自然数列中素数出现的规律是很复杂的. 各种形状的数，往往既可能是素数，又可能是复合数. 现在提出这样一个问题，是否存在整系数多项式，使对于每一个整数 x，$f(x)$ 都是素数？答案是否定的.

定理 1　如果

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个整系数多项式，其中 $a_n > 0$，那么有无穷多个整数 x，使 $f(x)$为复合数.

证:因为

$$f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right), x > 0,$$

所以

$$f(x) = a_n x^n(1 + o(1))(\text{当 } x \to \infty).$$

同理可知

$$f'(x) = n a_n x^{n-1}(1 + o(1))(\text{当 } x \to \infty).$$

因此存在自然数 x_0 充分大,当 $x > x_0$ 时有

$$(1)\qquad l = f(x_0) > 1$$

及

(2) $\qquad f(x)>f(x_0)$.

我们将证明，对于任何自然数 k，$f(x_0+kl)$ 都是复合数．由二项式展开可知

$$
\begin{aligned}
(x+h)^m-x^m &= \binom{m}{1}x^{m-1}h+\binom{m}{2}x^{m-2}h^2+\cdots \\
&\quad +\binom{m}{m-1}xh^{m-1}+h^m \\
&= h\left(\binom{m}{1}x^{m-1}+\binom{m}{2}x^{m-2}h+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\binom{m}{m-1}xh^{m-2}+h^{m-1}\right),
\end{aligned}
$$

因此

$$h\mid((x+h)^m-x^m),\ m=1,2,\cdots.$$

由于

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= a_n((x+h)^n-x^n) \\
&\quad +\cdots+a_1((x+h)-x),
\end{aligned}
$$

所以

$$h\mid(f(x+h)-f(x)).$$

即得

$$kl\mid(f(x_0+kl)-f(x_0)).$$

于是由(1)可得

$$f(x_0+kl)-l=tkl(t\text{ 是整数}),$$

$$f(x_0+kl)=(tk+1)l.$$

由(1)，(2)可知 $f(x_0+kl)>f(x_0)=l>1$，所以 $f(x_0+kl)$ 有真因数 l，因此它是一个复合数．定理证完．

既然不存在一个整系数多项式 $f(x)$，使当 $x=1,2,\cdots$ 时，$f(x)$ 都取素数．那么是否存在整系数多项式 $F(x)$，使当 $x=1,2,\cdots$ 时，

$F(x)$取无穷多个素数呢?

例1　假定 $F(x)=x$，答案是肯定的，即素数有无穷多(定理3.1).

例2　假定 $F(x)=kx+l$，其中 $(k,\ l)\ -1$. 答案也是肯定的. 这就是狄里赫勒定理(定理17.1).

但是我们还不知道任何一个次数大于1的多项式 $F(x)$，使当 $x=1,\ 2,\ \cdots$时，$F(x)$ 取无穷多个素数.

最简单的多项式是 $F(x)=x^2+1$，当 $x=1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10$ 时，x^2+1 分别等于2，5，17，37，101 都是素数. 更多的数据表明，当 $x\leqslant10^4$ 时，有842个 x 使 x^2+1 取素数. 当 $x\leqslant10^5$ 时，有6 656个 x 使 x^2+1 取素数. 而当 $x\leqslant1.8\times10^5$ 时，有11 223个 x 使 x^2+1 取素数. 看来应该有无穷多个自然数 x 使 x^2+1 取素数. 但是我们还不能给以证明.

其次，有没有无穷多个自然数 x 使 x^3+2 取素数呢? 我们也不能回答. 但已知 $3=1^3+2$，$29=3^3+2$，$127=5^3+2$，$24\ 391=29^3+2$ 都是素数.

依万尼希(H. Iwaniec)[①] 与王元分别对 x^2+1 与 x^3+2 得到下面结果:

定理2　1)存在无穷多个自然数 x，使 x^2+1 为素因数个数不超过2的殆素数. 2)存在无穷多个正整数 x，使 x^3+2 为素因数个数不超过4的殆素数.

更一般些，还有

---

① H. Iwaniec, Almost-Primes represented by quadratic polynomials, Invent. Math. 47 (1978), 171~188.

定理 3 (布赫夕塔布,黎切尔特)[①,②]　假定 $F(x)$是一个首项系数是正的既约整系数多项式(所谓既约,即 $F(x)$不能分解成两个次数$\geqslant 1$ 的整系数多项式的乘积).记同余式

$$F(x) \equiv 0 (\bmod p), 1 \leqslant x \leqslant p$$

的解数是 $\rho(p)$.假定对于任何素数 p 都有$\rho(p) < p$.如果$F(x)$的次数是 k,那么存在无穷多个自然数 x,使 $F(x)$为素因数个数不超过 $k+1$ 的殆素数.

有进一步的猜想,即对于任何适合于定理 3 条件的多项式 $F(x)$,都存在无穷多个自然数 x,使 $F(x)$取素数.

更一般些,还有辛哲尔(A.Schinzel)猜测:假定有 n 个整系数多项式$F_1(x), \cdots, F_n(x)$,它们的首项系数都是正的,而且都是既约的,假定同余式

$$F_1(x) \cdots F_n(x) \equiv 0 (\bmod p), 1 \leqslant x \leqslant p$$

的解数为 $\rho(p)$.如果对于任意素数 p 都有$\rho(p) < p$,那么存在无穷多个自然数 x 使$F_1(x), \cdots, F_n(x)$同时都取素数,并且有类似的"素数定理"的猜测.

例 1　取 $F_1(x) = x, F_2(x) = x+2$,就得到孪生素数猜测.

例 2　取 $F_1(x) = x, F_2(x) = x+2, F_3(x) = x+6$,就得到三生素数猜测.

例 3　取 $F_1(x) = x, F_2(x) = x + l_1, \cdots, F_n(x) = x + l_{n-1}$,此处 $l_1 < \cdots < l_{n-1}$为自然数.假定对于任何素数 p,诸整数 0,l_1,$\cdots$,l_{n-1}模 p 互不同余的个数皆小于p,即得 n 生素数猜测(见本文第十九部分).

---

① А.А.Бухштаб, Комбинаторное Усиление Метода Эратосфенова Решета, УМН СССР, 22(1967), 199~226.

② H.E.Richert, Selberg's sieve with weights, *Mathematika*;16(1969), 1~22.

已知多项式

$$x^2-x+17,$$

当 $x=1, \cdots, 16$ 时，都取素数．又已知多项式

$$x^2-x+41,$$

当 $x=1, \cdots, 40$ 时，都取素数．现在提一个问题：任意给予一个自然数 N，能不能找到素数 p，使当 $x=1, \cdots, N$ 时，多项式

$$x^2-x+p$$

都取素数?

这个问题比孪生素数猜测与三生素数猜测更难．假定上面的问题得到了正面的答案．取 $q_1\geqslant 3$ 为素数，那么存在素数 q_2 使当 $x=1, \cdots, q_1$ 时，

$$x^2-x+q_2$$

都取素数．显然 $q_2>q_1$（否则若 $q_2\leqslant q_1$，则当 $x=q_2$ 时，即得复合数 q_2^2）．又对于素数 q_2，存在素数 q_3 使当 $x=1, \cdots, q_2$ 时，

$$x^2-x+q_3$$

都取素数．依次类推．存在素数数列 $q_1<q_2<\cdots$，使当 $x=1, \cdots, q_{i-1}$时，

$$x^2-x+q_i$$

都取素数．特别取 $x=1, 2$，即得无穷多对孪生素数 (q_i, q_i+2) $(i=2, 3, \cdots)$．又取 $x=1, 2, 3$，即得无穷多组三生素数 (q_i, q_i+2, q_i+6) $(i=2, 3, \cdots)$．从而孪生素数猜测与三生素数猜测将都有了肯定的答复．

从这里也可以看出，数论中能够建议的猜想，常常比能解决的要多得多．

二十二　表整数为素数与整数平方之和的问题

哈代与李特伍德在 1922 年曾猜测，每一个充分大的不是完全

平方的自然数都可以表示为一个素数与一个自然数的平方之和．这一猜测至今仍没有解决．

假定 p 是奇素数，那么$\frac{p-1}{2}$与$\frac{p+1}{2}$都是自然数，所以

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+p.$$

另一方面，如果 $n=3k+2$，其中 k 是自然数，现在来证明不存在自然数 x 与素数 q 使

$$n^2=x^2+q.$$

假如上式成立，那么

$$q=n^2-x^2=(n+x)(n-x).$$

因为 q 是素数，所以 $n+x=q$，$n-x=1$，从而

$$q=2n-1=6k+4-1=3(2k+1).$$

这是不可能的．

因此我们证明了存在无穷多个自然数的完全平方，它们都可以表示成为一个素数与一个自然数的平方之和．另一方面，也存在无穷多个自然数的完全平方，它们都不能表示成一个素数与一个自然数的平方之和．

哈代与李特伍德在 1922 年还猜测，每一充分大的整数都可以表示为一个素数与两个整数的平方之和．这个猜测是林尼克在 1960 年解决的．

定理 1 (林尼克)[①]　每一充分大的整数 n 都可以表示成一个素数与两个整数的平方之和．

在定理 1 中，我们也可以得到将整数 n 表示成一个素数与两个整数的平方之和的表示个数的渐近公式．用类似的方法还可以证

① Ю. В. Линник, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных Задачах, изд. Лин. ун-та; 1961.

明：

定理 2 对于任意整数 a，皆存在无穷多个素数 p 表示成为

$$p=x^2+y^2+a,$$

其中 x 与 y 都是整数.

注意：多项式 x^2+y^2+a 是两个变数 x，y 的多项式.

二十三 模 p 的剩余类分布问题

假定 $k>1$ 为整数及 p 表示素数. 在本文第十二部分中，我们已经定义了模 p 的 k 次剩余与 k 次非剩余.

我们用 $n_k(p)$ 表示模 p 的最小正 k 次非剩余. 例如 $n_2(7)=3$, $n_2(11)=2$ 等. 最有名的问题是估计 $n_2(p)$ 的上界. 目前关于 $n_2(p)$ 的最佳估计是布尔吉斯于 1957 年证明的.

定理 1 (布尔吉斯)① $n_2(p)=O\left(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}\right)$, 其中 ε 是任意给定的正数，而与"O"有关的常数仅依赖于 ε.

关于 $n_k(p)$，王元以后也证明了类似的结果：

定理 2 假定 ε 为任意正数，则当 p 充分大时有：

1) $n_k(p)\leqslant p^{\frac{1}{4e^{\frac{k-1}{k}}}}$ $(k\geqslant 2)$,

2) $n_k(p)\leqslant p^{\frac{1}{12}}$ $(k\geqslant 21)$,

3) $n_k(p)\leqslant p^{\frac{\ln\ln k+\varepsilon}{4\ln k}}$ $(k\geqslant e^{33})$.

但这些结果与理想的猜想结果还相距很远. 一些数据表明似乎应该有：

(1) $$n_2(p)=O((\ln p)^2),$$

---

① D. A. Burgess. The distribution of guadratic residues and non-residues, *Mathematika*; 4 (1957), 106~112.

或者甚至可能有：

(2)　　$n_2(p)=O((\ln p)^{1+\epsilon})$,

此处与"O"有关的常数仅依赖于 ϵ.但是可以证明

(3)　　$n_2(p)=\Omega(\ln p)$.

在广义黎曼猜测真实的假定下(即假定(17.4)成立),可以证明(1)式成立.

关于 $n_k(p)(k>2)$的猜测结果也是与 $n_2(p)$完全一样的.

另一个有名的问题是关于模 p 的最小原根问题.假定 g 是一个自然数,且 $p\nmid g$,那么由定理 8.1 可知：

$$g^{p-1}\equiv 1(\bmod p).$$

如果当 $1\leqslant l<p-1$ 时都有

$$g^l\not\equiv 1(\bmod p),$$

我们就称 g 是模 p 的原根.可以证明模 p 的原根是存在的（见华罗庚著《数论导引》第三章）. 我们用 $g(p)$来表示模 p 的最小正原根. 例如 $g(11)=2, g(41)=6, g(409)=21, g(467)=2$ 等. 关于原根最著名的问题之一是估计 $g(p)$的上界. 目前最好的结果是用布尔吉斯方法，由布尔吉斯与王元独立地证明的,即：

定理 3　$g(p)=O(p^{\frac{1}{4}+\epsilon})$,其中 ϵ 为任意正数,而与"O"有关的常数仅与 ϵ 有关.

同样,这个结果与关于 $g(p)$的猜测结果

(4)　　$g(p)=O((\ln p)^2)$或 $g(p)=O((\ln p)^{1+\epsilon})$

相比,是差得很远的.

在广义黎曼猜测真实的假定下,王元证明了：

(5)　　$g(p)=O(m^6(\ln p)^2)$,

此处 m 表示 $p-1$ 的互异的素因数个数.

关于原根另一个重要问题是阿丁(E.Artin)在 1927 年提出的猜测,即对于任意不等于 1, $p-1$ 及完全平方的正整数 a,必定存在无

穷多个素数 p,以 a 为原根,特别是存在无穷多个素数 p,以 2 为原根.

关于这个问题,还没有解决.1967 年,霍勒[①]在某种黎曼猜测成立的假定之下,证明了阿丁猜测,并得到了以 a 为原根的适合于 $p\leqslant x$ 的素数个数的渐近表达式.

二十四 模 p 的二次型同余式的最小解

假定 $q_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$为整数及 $q_{ij}=q_{ji}$,记 $\underset{=}{x}=(x_1,\cdots,x_s)$为有 s 个整数分量的矢量.定义二次型

$$Q(\underset{=}{x})=Q(x_1,\cdots,x_s)=\sum_{i,j=1}^{s}q_{ij}x_ix_j,$$

又命

$$|\underset{=}{x}|=\max_{1\leqslant i\leqslant 4}|x_i|.$$

数论中有下面的猜想,假定 m 为整数$\geqslant 2$ 及 $s\geqslant 4$,则同余式

(1) $$Q(\underset{=}{x})\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$$

的最小解满足

$$0<|\underset{=}{x}|\ll\sqrt{m}.$$

所谓最小解即方程(1)的使$|\underset{=}{x}|$达到最小的解 $\underset{=}{x}$,但 $\underset{=}{x}\neq\underset{=}{0}=(0,\cdots,0)$.

我们首先说明只要当 $s=4$ 时证明这一猜想即可,事实上,若当 $s=4$ 时猜想成立,即

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$$

有解适合

$$0<\max_{1\leqslant i\leqslant 4}|x_i|\ll\sqrt{m},$$

则取

---

① C. Hooley, On Artin's Conjecture, *J. reine angew*. Math.; 225(1967), 209~220.

$$\underline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,0,\cdots,0),$$

即得

$$Q(\underline{x})\equiv 0(\bmod m)$$

有解适合

$$0<|\underline{x}|=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|x_i|\ll\sqrt{m}.$$

明所欲证.

其次，我们来说明猜想中的$\sqrt{m}$是臻于至善的．事实上，取

$$Q(\underline{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

则对于任何$\underline{x}\neq\underline{0}$及$Q(\underline{x})\equiv 0(\bmod m)$,必定有

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant m,$$

所以

$$|\underline{x}|=\max_{1\leqslant i\leqslant 4}|x_i|\geqslant\sqrt{m}/2.$$

明所欲证.

最后我们来说明$s=4$已不能再减少了,即只要举例说明三个变数的二次型,猜想不成立.事实上,取$m=p$为一个奇素数,假定a为一个模p的二次非剩余,$b=[p^{1/3}]$及

$$Q(\underline{x})=Q(x_1,x_2,x_3)=(x_2-bx_1)^2-a(x_3-bx_2)^2,$$

由

(2) $$Q(\underline{x})\equiv 0(\bmod p)$$

可知

$$\begin{cases}x_3-bx_2\equiv 0(\bmod p),\\ x_2-bx_1\equiv 0(\bmod p).\end{cases}$$

若$x_2\neq bx_1$,则$|x_2-bx_1|\geqslant p$,于是$\max(|x_2|,|bx_1|)\geqslant\frac{p}{2}$,从而$|\underline{x}|\geqslant pb^{-1}\gg p^{2/3}$.若$x_3\neq bx_2$,亦得同样结论,最后$x_2=bx_1$,$x_3=bx_2$,$\underline{x}\neq\underline{0}$,于是

$$|x_3| = b^2 |x_1| \gg b^2 \gg p^{2/3}.$$

因此同余式(2)的任何非零解皆满足

$$|\underline{x}| \gg p^{2/3}.$$

首先是希斯-仆朗对于 $m=p$ 基本上证明了这一猜想，他证明了当 $m=p$ 及 $s\geqslant 4$ 时，同余式(1)有解适合

$$0 < |\underline{x}| \ll \sqrt{p}\ln p.$$

柯克朗(T. Cochrane)对于 $m=p$，完全解决了这一猜想，他证明了

定理 1 (柯克朗)[①] 当 $m=p$ 及 $s\geqslant 4$，同余式(1)有解 $\underline{x}$ 适合

$$0 < |\underline{x}| \ll \sqrt{p}.$$

以后，希斯-仆朗与柯克朗又分别将他们自己的结果推广至 $m=pq$ 的情况，此处 p, q 为互相不同的素数.

后　　记

《谈谈素数》这本小册子是十年浩劫结束时，应上海教育出版社赵斌编辑之邀，立即动手写的. 大概是十年来少有科技图书出版，所以初版 5 万册很快销售一空.

这么多年来，不断有读者给我来信. 我很高兴他们从本书中了解到“素数论”的知识，但也产生了一些副作用，尽管我们一再声明研究经典数论问题，必须首先有坚实的数学基础，否则会劳而无功，但少数人不听劝说，确实浪费了宝贵时间，使我很不安，所以我在此再次强调这一观点.

几年前，“九章出版社”总经理孙文先先生邀我再版这本小册

① T. Cochrane, Small zeros of quadratic forms modulo p, Ⅲ, J Number Theory, 37 (1991), 92～99.

子，苦无时间，直到最近潘承彪教授将华罗庚教授的《数论导引》的“附录”作了重新修订，使我可以将有关部分搜入本书之中，省了不少时间，在此特表感谢．这次修订，除将原书有关问题的最新结果补入本书外，还增加了第 24 节，讲述了模 p 的二次型同余式的最小解问题，这次修订之后，书名为《素数》，交由广东科技出版社出版．

解析数论在中国*

解析数论在中国的研究开始于本世纪30年代，创始者是我国著名数学家华罗庚教授.他对许多著名问题都作过重要贡献，例如完整三角和的估计、华林问题、塔利问题、华林 — 哥德巴赫问题及高斯圆内格点问题等.他在解析数论方面的大部分工作搜集在他的专著《堆垒素数论》《指数和的估计及其在数论中的应用》与《数论导引》中，所以本文不再叙述这些工作.华教授在1953 ~ 1957年间，曾在中国科学院数学研究所领导了一个解析数论讨论班.在讨论班中认真学习了解析数论的基本思想与方法，例如史尼尔曼(Schnirelman)密率论，仆朗(Brun)与塞尔伯格(Selberg)筛法，哈代(Hardy)与李特伍德(Littlewood)圆法，依·维诺格拉朵夫(I.M.Vinogradov)、华罗庚与冯·德·科坡德(Van der Corput)关于三角和的估计方法，及列尼克(Linnik)的分析方法等.除此而外，对于数论其他分支的重要进展也给予密切的注意.讨论班中也可以报告参加者们的工作.华教授领导讨论班的特点是治学严谨，要求严格.所以，虽然只有短短几年，却出了很好的人才与成果.闵嗣鹤、越民义、陈景润、许孔时、严士健、吴方、魏道政、潘承洞、尹文霖与王元等都是讨论班的参加者.在经历了

---

* 1979年5 ~ 6月，笔者曾应邀在巴黎"德让、毕索、包托研究班"与波恩第20届数学工作会议上，以《筛法与哥德巴赫猜想》为题，报告了本文的有关部分.

原载《自然杂志》，3：8，1980.

林彪、"四人帮"的严重破坏后，回顾往昔，感到恢复和发扬优良的学风，在数学界已是迫在眉睫的事. 对青年数学家来说，更是如此. 现将解放后解析数论在我国的发展概述如下.

一 筛法及其有关的问题

筛法肇源于"厄拉多塞筛法". 厄氏注意到 $n^{1/2}$ 与 n 之间的素数，可通过从 $2, 3, \cdots, n$ 中去掉那些含有不超过 $n^{1/2}$ 的素数因子的诸数而得到. 命 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数，$\prod = \prod\limits_{p \leqslant n^{1/2}} p$，此处 p 表示素数，则

$$1 + \pi(n) - \pi(n^{1/2}) = \sum_{a \leqslant n} \sum_{d \mid (a, \prod)} \mu(d)$$

$$= \sum_{d \mid \prod} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right],$$

此处 $\mu(n)$ 表示麦比乌斯函数，$[x]$ 表示 x 的整数部分. 如果用 $\frac{n}{d} + \theta$ 来代替 $\left[\frac{n}{d}\right]$，则上式将导致误差项 $O(2^{\pi(\sqrt{n})})$. 所以厄氏筛法几乎是无用的.

仆朗在 1919 年对筛法作了巨大改进，并成功地用于许多困难而重要的数论问题. 1947 年，塞尔伯格对厄氏筛法作了另一重要改进，比仆朗筛法简单，而结果却更精致. 这些方法已成为数论中强有力的工具.

筛法联系着数论中两个重要猜想：

(a) 每个大于 2 的偶数 n 都是两个素数之和，

(b) 有无穷多对孪生素数 $p, p + 2$.

其中(a) 称为哥德巴赫猜想，(b) 称为孪生素数猜想.

命 $A = \{a_v\}(v = 1, \cdots, n)$ 为一个整数集合，P 为 r 个素数 $p_1 < \cdots < p_r$ 的集合. 命 $S(A, P)$ 为 A 中不能被任何 $p_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ 整除

的整数个数.例如取 $a_v = v(n-v)(v=1,\cdots,n)$.又假定 P 为适合于 $p \leqslant n^{1/(l+1)}$ 的全体素数,此处 l 为一个正整数.假定当 n 充分大时,可以证明 $S(A,P)$ 有一个正的下界估计,则下面的命题成立:

(a′) 每一大偶数 n 都是两个素因子个数各不超过 l 的整数之和.

我们将这一命题记为 (l,l).类似地,可以定义 $(l,m)(l \neq m)$.

仆朗首先证明了(9,9).一些数学家改进了仆朗的方法与结果:(7,7)——拉德马海尔(Rademacher,1924);(6,6)——埃斯特曼(Estermann,1932);(5,7),(4,9),(3,15),(2,366)——黎奇(Ricci,1937);(5,5),(4,4)——布赫夕塔布(Buchstab,1938～1940);(a,b),此处 $a+b \leqslant 6$——孔恩(Kuhn,1953～1954).

仆朗与塞尔伯格方法的要点在于用不等式来代替

$$\sum_{d \mid n}\mu(d) = \begin{cases}1, & \text{当 } n = 1,\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

例如给予任意一组实数 $\{\lambda_d\}$,其中 $\lambda_1 = 1$,则

$$S(A,P) = \sum_{v \leqslant n}\sum_{d \mid (a_v,P)}\mu(d) \leqslant \sum_{v \leqslant n}\Big(\sum_{d \mid (a_v,P)}\lambda_d\Big)^2.$$

选择适当的 λ_d 使上式右端达到极小,即导致塞尔伯格上界方法.特别在综合仆朗、塞尔伯格、布赫夕塔布与孔恩的方法的基础上,王元证明了(3,4),(3,3),(a,b),此处 $a+b \leqslant 5$,(2,3)(1956～1957),其中(3,3)也被阿·维诺格拉朵夫(A.I.Vinogradov)独立地加以证明.

如果我们取 $a_p = n-p$,此处 $p \leqslant n$ 为素数,则当 n 充分大时,$S(A,P)$ 有一个正的下界估计,即意味着下面的命题成立:

(a″) 每一个大偶数都是一个素数及一个不超过 l 个素数的乘积之和.

1932 年，首先是埃斯特曼在假定 GRH(广义黎曼猜想) 的情况下，证明了(1,6). 不用未经证明的上述猜想，瑞尼(Renyi) 于 1948 年证明了(1,c)，此处 c 是一个正常数. 在瑞尼的证明中，一个关于 $\pi(x,k,l)$ 的中值公式被证明了用来代替所谓的殆 GRH，即

$$\sum_{x \leqslant x^{\delta}} \operatorname*{Max}_{(l,k)=1} \left| \pi(x,k,l) - \frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right), \tag{1}$$

此处 $\pi(x,k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l (\bmod k)}} 1$, $\mathrm{li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$, (l,k) 表示 l,k 的最大公约，$\varphi(k)$ 表示欧拉函数，A 为任意正常数，δ 为某一正数. 式(1) 的证明基于列尼克的大筛法. 还需注意在瑞尼原来的论文中，$\pi(x,k,l)$ 需换成一个加权数和. 如果(1) 对于 $\delta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ 成立，此处 ε 表示任意正数，则(1) 可用来代替埃斯特曼(1,6) 证明中的 GRH.

王元在 GRH 之下将 6 改进为 3，即证明了(1,3).

1961 年，巴尔巴恩(Barban) 证明(1) 对于 $\delta = 1/6$ 成立. 潘承洞于 1962 年独立地证明(1) 对于 $\delta = 1/3$ 成立，并结合王元证明(1,3)(假定 GRH) 的方法，导出了(1,5). 潘承洞与巴尔巴恩还独立证明(1) 对于 $\delta = 3/8$ 成立，并导出(1,4)(王元同时指出由潘承洞的 $\delta = 1/3$ 也可导出(1,4)). 最后，朋比利(Bombieri) 与阿·维诺格拉朵夫于 1965 年独立证明(1) 对于 $\delta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ 成立，从而证明了(1,3). 准确地说，朋比利公式为

$$\sum_{k \leqslant x^{1/2}/\log^B x} \operatorname*{Max}_{(l,k)=1} \left| \pi(x,k,l) - \frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right),$$

此处 A 为任意正常数，$B = B(A)$. 尽管朋比利公式比阿·维诺格拉朵夫公式只是稍强一点，但在数论中却有很大应用. 使他获得 1974 年国际数学大会费兹(Fields) 奖，主要也是这一工作.

1966 年，陈景润对(1,3) 的证明作了重要改进，从而出色地证明

了(1,2),在国际上被称为陈氏定理.这个定理有许多简化证明,其中之一是潘承洞、丁夏畦与王元获得的.国外有学者将陈氏定理看作筛法发展的顶峰,因为一般推测,用筛法是极难证明(1,1)的.

关于孪生素数猜想,用陈景润的方法可以证明存在无穷多个素数 p,使 $p+2$ 为不超过 2 个素数的乘积.

筛法还可以用来处理有关殆素数的一些其他问题,所谓殆素数者即素因子个数不超过某一常数的整数.例如在 1957 年,王元证明了下述结果:(i) 命 $F(x)$ 为 s 次整值多项式且没有固定素因子,则存在无穷多个整数 n 使 $F(n)$ 为不超过 $s+c\log s$ 个素数的乘积,其中 c 是一个常数.(ii) 当 x 充分大时,区间 $x<n\leqslant x+x^{10/17}$ 中恒有一个数,其素因子个数不超过 2.

这两个结果分别是前人结果的改进,也被以后的数学家加以改进.例如布赫夕塔布与黎彻特(Richert)独立证明了(i)中的 $s+c\log s$ 可以改进为 $s+1$.关于(ii),最佳的结果是陈景润证明的,他证明 $x^{10/17}$ 可以用 $x^{\frac{1}{2}-0.023}$ 来代替.

二 指数和的估计及其有关的问题

假定 Ω 是 s 维欧氏空间中的一个有限集,$f(x_1,\cdots,x_s)$ 是一个实函数,则估计形如

$$\sum_{(x_1,\cdots,x_s)\in\Omega} e^{2\pi i f(x_1,\cdots,x_s)}$$

的指数和,在解析数论中是十分重要的.除这个问题本身饶有兴趣外,解析数论中许多重要问题的处理都与指数和的估计有关,例如华林问题、哥德巴赫问题、高斯圆内格点问题等.

1. 完整三角和.假定 q 是一个整数,$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 是一个整系数多项式,且 $(a_k,\cdots,a_1,q)=1$.完整三角和 $S(q,f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i f(x)/q}$ 的估计在解析数论中是非常重要的.当 $s=2$ 时,

$S(q,x^2)$ 称为高斯和,并由高斯证明了 $|S(q,x^2)|=O(q^{1/2})$.这一历史难题是华罗庚在 1940 年出色地解决的,他证明了

$$|S(q,f(x))|\leqslant c(k)q^{1-\frac{1}{k}}, \tag{2}$$

此处 q 的阶是臻于至善的.不少数学家致力于 $c(k)$ 的改进,最佳结果 $c(k)\leqslant e^{7k}$ 是陈景润在 1977 年证明的.

2. 高斯圆内格点问题.命 $A(x)$ 表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内格点 (u,v) 的个数.高斯在 1863 年证明了

$$A(x)=\pi x+O(x^{1/2}), \tag{3}$$

此处 $O(x^{1/2})$ 称为误差项.寻找更佳的误差项使(3)成立,通常即称作高斯圆内格点问题.1916 年,哈代证明误差项不能比 $O(x^{\frac{1}{4}-\delta})$ 更好(粗略地说).夕尔宾斯基(Sierpinski)与冯·德·科坡德分别于 1906 年与 1923 年证明误差项可以取作 $O(x^{\frac{1}{3}+\delta})$ 与 $O(x^{\frac{37}{112}+\delta})$.冯·德·科坡德的证明基于某种三角和的估计,通常称为冯·德·科坡德方法.他的结果被不少数学家改进了.至 1942 年,最佳估计 $O(x^{\frac{13}{40}+\delta})$ 是华罗庚得到的.进一步的改进 $O(x^{\frac{12}{37}+\delta})$ 是陈景润在 1963 年证明的.以后则只有幅度很小的改进了.

3. 狄利克雷除数问题.命 $d(n)$ 表示 n 的因子个数,则和数 $D(x)=\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}d(n)$ 即等于区域

$$uv\leqslant x, u\geqslant 1, v\geqslant 1$$

中的整点 (u,v) 的个数.狄利克雷于 1849 年证明了

$$D(x)=x(\log x+2\gamma-1)+O(\sqrt{x}), \tag{4}$$

此处 γ 为欧拉常数.寻找更佳的误差项使(4)成立,通常即称作狄利克雷除数问题.这个问题与圆内格点问题颇类似.迟宗陶与黎彻特分别在 1950 年与 1953 年证明了误差项可取作 $O(x^{\frac{15}{46}+\delta})$.进一步的结果是尹文霖在 1963 年证明的 $O(x^{\frac{12}{37}+\delta})$.以后还有些小改进.

4．球问题．作为圆问题的推广，还可以研究这样的问题：寻求使公式

$$\sum_{u^2+v^2+w^2\leqslant x} 1 = \frac{4}{3}\pi x^{3/2} + O(x^{\vartheta}) \tag{5}$$

成立的最佳误差项，即最小的 ϑ．这个问题叫做球问题．目前最好的结果仍是依·维诺格拉朵夫与陈景润在 1963 年独立证明的，即 $O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon})$．类似于球问题，还可以研究三维空间的除数问题，即估计区域

$$uvw \leqslant x,\ u \geqslant 1,\ v \geqslant 1,\ w \geqslant 1$$

中的格点(u, v, w)的个数．越民义、吴方、尹文霖与陈景润曾先后获得了较精致的结果．

5．华林问题．所谓华林问题，即研究不定方程

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k \tag{6}$$

对于给定整数 $k > 0$ 的可解性问题．1909年，希尔伯特首先证明了对于任意正整数 k 皆存在常数 $s = s(k)$，使方程(6)对于任意正整数 n 皆有非负整数解 $x_i (1 \leqslant i \leqslant s)$．研究华林问题的新方法——哈代与李特伍德圆法可描述如下：命 $\mathcal{T}(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha x^k} (P = [n^{1/k}])$，则显然方程(6)的解数等于

$$r_s(n) = \int_0^1 \mathcal{T}(\alpha)^s e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha .$$

积分区域可分为两部分：优弧与劣弧．粗略地说，优弧含有[0,1]中包有分母较小的分数 h/q 的那些小区间 $\mathfrak{m}_{h,q}$．而[0,1]中的其余部分则称为劣弧．$r_s(n)$ 的主项由优弧部分的积分得出，但主要的困难却在于对劣弧的估计，它往往归结为被称做韦尔(Weyl)和的指数和的估计．哈代与李特伍德证明了，当 $s \leqslant 2k+1$ 时，

$$\sum_{\mathfrak{M}_{h,q}} \int_{\mathfrak{M}_{h,q}} \mathscr{T}(\alpha)^s e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \sim \mathfrak{S}(n) \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)^s} n^{\frac{s}{k}-1}.$$

1957 年，华罗庚将 $2k+1$ 改进为 $k+1$. 这一结果是臻于至善的. 假定 $g(k)$ 是使所有正整数皆可表示成 s 个非负整数的 k 次幂和的 s 的确下界. 陈景润在 1965 年证明了 $g(5)=37$.

6. 塔利问题. 命 $r_t(P)$ 为不定方程组

$$x_1 + \cdots + x_t = y_1 + \cdots + y_t,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^k + \cdots + y_t^k$$

的整数解数，此处 $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant P$. 华罗庚于 1952 ~ 1953 年证明了当 $k \geqslant 11$ 与 $t > [k^2(3\log k + \log\log k + 4)]$ 时，

$$\lim_{p\to\infty} P^{k(k+1)/2} r_t(P) = \mathfrak{S},$$

此处 $\mathfrak{S}$ 是一个常数. 这一结果的证明是以关于韦尔和估计的依·维诺格拉朵夫方法及华罗庚关于完整三角和的估计方法为基础的. 当 k 较小时，华罗庚与陈景润都曾获得较精致的估计.

7. 模 p 的最小原根. 利用韦依(Weil)关于有限域上代数数域的类似 RH(黎曼猜想) 的重要贡献，伯吉斯(Burgess) 在 1957 年改进了包利雅(Polya) 关于特征和的估计定理及模 p 最小正二次非剩余 $r(p)$ 的估计. 利用他的方法，王元(1959) 与伯吉斯(1962) 独立地证明了 $g(p)=O(p^{\frac{1}{4}+\delta})$，此处 $g(p)$ 表示模 p 的最小正原根. 这个结果改进了依·维诺格拉朵夫(1930)、华罗庚(1942) 与爱多士(Erdös, 1945) 等的结果. 王元还证明在 GRH 的假定下有 $g(p)=O(m^6\log^2 p)$，此处 m 表示 $p-1$ 的素因子个数. 这个结果是安基尼(Ankeny) 结果的改进.

三 解析数论的其他结果

1. 命$(k,l)=1$, $P(k,l)$为算术级数$kn+l(n=1,2,\cdots)$中的最小素数.列尼克首先证明了$P(k,l)=O(k^c)$,此处c是一个常数.潘承洞首先证明$c=5448$即足.陈景润、尤梯拉(Jutila)与葛拉姆(Graham)曾分别改进了潘承洞的结果.目前最佳的估计$c=16$是陈景润得到的.

2. 命$\mathcal{N}(T,\gamma)$为黎曼ζ函数$\zeta(s)$在矩形$\frac{1}{2}+v\leqslant\sigma\leqslant1$, $|t|\leqslant T$中的零点个数,此处$0\leqslant v\leqslant\frac{1}{2}$, $T>0$.在DH(密度猜想)即$\mathcal{N}(T,v)=O(T^{1-2v}\log(T+2))$的假定下,王元于1977年证明了对于任意$n\geqslant3$,皆存在素数$p,p'$使$R(n)O((\log n)^{\frac{148}{13}+\delta})$,此处$R(n)=|n-p-p'|$.一个类似的定理$R(n)=O(\log^7 n)$首先是列尼克证明的,但在他的证明中有些错误,其结论需修正为$R(n)=O(\exp(c(\log n)^{10/11}\log\log n))$.潘承洞用塞尔伯格方法也证明了类似的结果$R(n)=O(\log^c n)$.

3. 命$M(x)$为不超过x的偶数中,不能表为两个素数之和的偶数个数.华罗庚等首先证明$M(x)=O(x/\log^A x)$,此处A为任意常数.蒙哥马利(Montgomery)与沃恩(Vaughan)进一步证明了存在$\delta>0$使$M(x)=O(x^{1-\delta})$.最近,陈景润与潘承洞合作证明了$\delta>0.01$.

4. 命$r(n)$为将偶数表为两个素数之和$n=p+p'$的表示个数.陈景润于1978年证明了

$$r(n)\leqslant7.8\prod_{\substack{p\mid n\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n}{\log^2 n}(1+o(1)).$$

这一结果改进了过去用朋比利中值公式与塞尔伯格方法相结合而得到的估计,即用8来代替上式中的7.8.将8换成$8-\varepsilon$一般被看成是

相当困难的问题.潘承彪对陈景润结果的证明作了简化,当然 7.8 需换成大一些的数.

5. 关于史尼尔曼常数、三个素数定理的简化与推广、无平方因子数的估计、华林问题的推广、指数和的估计、黎曼 ζ 函数、殆素数、数论函数的研究等方面,越民义、陈景润、丁夏畦、吴方、潘承洞、尹文霖、邵品琮、任建华、潘承彪、谢盛刚、楼世拓、姚琦、于秀沅、陆洪文、陆鸣皋、冯克勤、于坤瑞及王元等都作了一些值得介绍的工作,在此就不详谈了.

数　论*

数论(theory of numbers)　在数学中,研究数的规律,特别是研究整数性质的数学分支.它与几何学一样,既是最古老的数学分支,又是始终活跃着的数学研究领域.从方法上讲,它可以分成初等数论、解析数论和代数数论.

自然数分成1、素数和复合数,刻画自然数的基本规律早在公元前4世纪就为欧几里得(Euclid)所证明,即每个复合数都可以唯一地表成素数的乘积.这个定理又称为算术基本定理.素数分布是数论最早研究的课题之一,欧几里得证明过素数有无穷多.他还给出了求两个自然数的最大公约数的算法,即所谓欧几里得算法.在公元前250年,厄拉多塞发明了一种筛法,由此可以求出不超过某个自然数 N 的全部素数.现在的素数表都是根据这一方法略加改变而得出来的.

数论研究不定方程(即要求解为整数的方程)的求解问题.由于公元250年丢番图研究过这种方程,故又称丢番图方程.最简单的不定方程是一次方程 $ax + by = 1$,此处 a、b 为整数,且互素,即 $(a, b) = 1$.借助于欧几里得算法,可以求出它的解.如果整数 a、b 用正整数 m 除,有相同的余数,就称 a 与 b 关于模 m 同余,记为 $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$.以 x 为变数的同余方程 $ax \equiv c(\mathrm{mod}\,m)(x = 1, \cdots, m)$

* 这是《中国大百科全书》数学卷中的一个条目,作为试写条目,首先发表于《百科知识》,8,1984,52 ~ 55.

等价于求解一次不定方程 $ax + my = c$，此处 $0 < x < m$．同余方程即某些不定方程．中国关于不定方程的研究有悠久的历史，如 5 世纪的《张邱建算经》中的"百鸡问题"及《孙子算经》中的"物不知其数"都属于一次不定方程问题．关于二次不定方程，公元前 1100 年商高就给出方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解 $x = 3, y = 4, z = 5$．不定方程式论虽然已有长久的发展，但完满解决的问题并不多．如著名的费马猜想，即当整数 $n \geqslant 3$ 时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解，就是至今仍未解决的难题．最近，利用代数几何学的成就，法尔廷斯证明了当 n 固定时，这一方程只有有限多个正整数解 x, y, z①．

类似地，可以研究将整数表为某种整数之和的问题，这一数论分支称为堆垒数论．例如，研究将整数表为正整数的 k 次方幂之和的种种问题，都属于华林问题范畴．又如，每一不小于 4 的偶数恒可以表为两个素数之和，这就是尚未解决的哥德巴赫猜想．

定义于自然数集上的函数称为数论函数．例如，欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 且与 n 互素的整数个数，$\sigma_\lambda(n)$ 为 n 的因数的 λ 次方幂之和，特别 $\sigma_0(n) = d(n)$ 表示 n 的因数个数及 $r(n)$ 表示不定方程 $n = x^2 + y^2$ 的解 x、y 的个数等等．研究数论函数的性质也是数论的一个重要课题．例如，易知

$$\sum_{n=1}^{x} r(n) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{x} d(n)$$

可以分别用圆 $\xi^2 + \eta^2 \leqslant x$ 与区域 $\xi\eta \leqslant x, \xi \geqslant 1, \eta \geqslant 1$ 的面积来作渐近计算，这种渐近计算的误差估计就是有名的高斯圆问题与狄利克雷除数问题．它们的误差皆不超过 $O(x^{1/4+\varepsilon})$ 的猜想，也是一个未解决的难题．此处 ε 为任意正数．

对于任何实数 a，如何构造有理数 $h/k\,(k > 0)$ 来逼近 a？狄利

① 1996 年，瓦依斯(A. Wiles) 证明了费马猜想．

克雷曾证明过，对于任意实数 a 及 $K>1$，皆存在整数 h,k 使 $0<k\leqslant K$ 及 $|a-h/k|\leqslant 1/kK$. 可以用连分数方法来构造 h/k. 将 a 展开成连分数 $a=[a_0,a_1,\cdots]$，取 h/k 为 a 的渐近分数，即 $h/k=[a_0,a_1,\cdots,a_n]$ 即可. 在 5 世纪时，中国的何承天与祖冲之就曾分别建议用 22/7(约率) 与 355/113(密率) 来近似计算 π. 这两个数都是 π 的渐近分数. 有理逼近的研究与丢番图方程的研究是密切相关的，故又称丢番图逼近. 研究实数的种种有理逼近问题是数论研究的一个重要课题.

数的几何学是用几何方法研究某些数论问题的一个数论分支. 特别是种种丢番图逼近问题. 例如，可以证明平面上以原点为对称中心的凸域，若其面积大于 4，则必含有一个非原点的整点(闵可夫斯基定理). 由此可以立即推出上述狄利克雷关于实数的有理逼近定理.

特殊类型的数是数论最早研究的对象之一. 例如，形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数称为费尔马数. 当 $n=0,1,2,3,4$ 时，F_n 都表示素数. 费尔马猜测 F_n 都表示素数，但欧拉证明了 $641\mid F_5$，所以费尔马的猜想被否定了. 形如 $M_p=2^p-1$(p 为素数) 的素数称为麦尔森素数，是否有无穷多个麦尔森素数，这是没有解决的问题. 迄今只知道 28 个麦尔森素数，最大者为 M_{86243}，也是迄今所知道的最大素数. 适合于 $\sigma_1(n)=2n$ 的整数称为完全数. 可以证明，偶完全数与麦尔森素数是一一对应的，故迄今共知道 28 个偶完全数. 然而，是否有奇完全数乃是未解决之难题.

整数系数的方程的根称为代数数，其他的复数则称为超越数. 超越数也是数论较早研究的课题. 例如，用初等方法可以证明 e 与 π 是超越数，运用复变函数论还可以证明 $2^{\sqrt{2}}$、i^i 等都是超越数，但欧拉常数 γ 与 $e+\pi$ 是否为超越数，都是至今尚未解决的难题.

在数论研究中，往往先根据一些感性知识，小心地提出"猜想"，再通过严格的数学推导来论证它，被证明了的"猜想"，就变成了"定理"，也有不少猜想被否定了．数论中的猜想都是整数性质的描写，其含义十分浅显明白，但不能误解为数论是数学中的一个孤立分支，数论问题是一个个孤立问题，只要从整数的定义出发就可以"研究"数论了．相反，数论从一开始就以其问题、方法和概念来影响数学其他部分的发展．例如，"理想"这一重要概念，就是研究费马猜想的产物．这一概念已经渗透到代数、几何和泛函分析等领域，可以说是近代一切数学领域所不可少的．由实际中来的问题与方法促进了数学发展的事实是屡见不鲜的，如力学与物理学的发展引起微积分学的产生与发展等．但从纯粹数学来说，它研究的最基本的对象是"数"与"形"．因此，由"几何图形"引出的几何直觉与由"数"引出的数量关系与概念，是由数学发展本身的矛盾产生的，它是数学发展的极为丰富的源泉与背景之一．因此，在数论中，未解决的问题比已经解决的问题要多得多，而且永远如此．

一般说来，用算术推导方法来论证数论命题的分支称为初等数论．而解析数论则是把一个算术问题化为一个分析问题，然后用分析的成果与方法来处理，从而导出算术的结果．如果在推导过程中，不用到单复变函数论中的柯西定理或同样深度的分析工具，仅仅只用到普通的数列求极限等等，则称为解析数论的初等方法．

解析数论开始于欧拉的一些研究，其中之一为关于素数有无穷多的证明，假定素数个数有限，则 $\prod_p (1-1/p)^{-1}$ 为有限数，此处 p 过所有素数，但

$$\prod_p (1-1/p)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散，故得矛盾．命 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数，则素数有无穷多可以表示为 $\pi(x) \to \infty$．关于 $\pi(x)$ 的研究是素数论的中心问题．

首先是切比谢夫(п.л.чебышев)用初等方法证明了

$$a \leqslant \varliminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leqslant \frac{6}{5} a,$$

此处 $a = 0.92129$. 尽管 a 的数值不断地被以后的数学家所改进,但并不能够证明素数定理,即 $\pi(x) / \frac{x}{\ln x}$ 的极限为1.

首先是黎曼确定了 $\pi(x)$ 与他所引进的复变函数 ζ 函数 $\zeta(s)$($s = \sigma + it$)之间的联系.当 $\sigma > 1$ 时,$\zeta(s)$ 由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

来定义,当 $\sigma \leqslant 1$ 时,可以由解析开拓来定义,除 $s = 1$ 为 $\zeta(s)$ 的一次极外,$\zeta(s)$ 在 s 平面上是正则的.黎曼猜想是说,在带状区域 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 中,$\zeta(s)$ 的零点都位于直线 $\sigma = 1/2$ 上面.这一著名猜想是一个纯分析问题,但它与 $\pi(x)$ 有密切的关系,可以证明它等价于 $\pi(x)$ 的极为精密的表达公式:

$$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(\sqrt{x}\ln x),$$

此处 $$\mathrm{li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

黎曼猜想离解决还相差很远.到目前为止,关于 $\pi(x)$ 最精密的估计是维诺格拉道夫与科罗波夫证明得到的:$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(xe^{(\ln x)^{0.6-\varepsilon}})$,此处 ε 为任意正数.这是从 $\zeta(s)$ 的零点分布的结果中推导出来的.

有一系列重要的数论问题,特别是与素数有关的问题的完满解决都关联着黎曼猜想及其类似猜想的解决.例如,相邻素数之差 $p_{n+1} - p_n$ 的估计问题,此处 p_n 表示第 n 个素数.又如算术级数 $kn + l$($n = 1, 2, \cdots$)中最小素数 $P(k, l)$ 的估计问题,此处 $(k, l) = 1$.

命 $2 \mid n$ 及 $r_2(n)$ 表示方程 $n = p + p'$ 的解 p、p' 的个数,此处

p、p' 为素数. 命 $S(\alpha) = \sum_{p \leqslant n} e^{2\pi i \alpha p}$.

由于 $\int_0^1 e^{2\pi i a x} dx = \begin{cases} 1, 当\ a = 0, \\ 0, 当\ a \neq 0, \end{cases}$

所以 $r_2(n) = \int_0^1 s(\alpha)^2 e^{2\pi i \alpha n} d\alpha$.

类似, 命 $r_{s,k}(n)$ 表示方程 $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$ 的解的个数, 此处 $x_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 均取正整数, 又命 $T(\alpha) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi \alpha x^k}$, 此处 $p = [n^{1/k}]$, 则 $r_{s,k}(n) = \int_0^1 T(\alpha)^s e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha$.

将[0,1] 分成优弧 M 与劣弧 m. 粗略地说, M 为包含较小分母的分数的小区间所组成, [0,1] 的其余部分为劣弧 m. 由于 $r_2(n)$ 与 $r_{s,k}(n)$ 的积分表达式中在优弧部分的积分可以估计出来, 所以它们的研究均归结为劣弧上的积分研究. 这就是哈代与李特伍德的圆法.

劣弧上积分的估计归结为在劣弧上指数和 $S(\alpha)$ 与 $T(\alpha)$ 的估计. 于是, 很多著名数论问题(如上述的哥德巴赫问题与华林问题)都化为纯分析问题, 即指数和的估计问题.

这种和的研究起源颇早, 最初是高斯研究了形如

$$S(n, q) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i n x^2 / q}$$

的指数和, 此处 $(n, q) = 1$, 并证明了 $|S(n, q)| \leqslant 2q$. 将 x^2 推广到一般的整系数多项式 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x$, 其中 $(a_k, \cdots, a_1, q) = 1$, 这一历史难题是华罗庚解决的.

命 $S(q, f(x)) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i f(x)/q}$, 华罗庚证明了 $|S(g, f(x))| = O(q^{1-1/k})$, 其中 $1 - \frac{1}{k}$ 是最佳可能的. 特别当 $q = p$ 为素数时, 由韦尔(A. Weil) 证明的有限域上类似的黎曼猜想可以推出

$|S(p, f(x))| \leqslant k\sqrt{p}$. 韦尔证明类似的黎曼猜想是基于他对代数几何学的深刻研究.这一结果最近已由斯捷潘诺夫、施密特和波姆比里用分析方法加以证明.用代数几何学的积垒,狄利热更证明了高维代数函数体上的类似黎曼猜想,由此可得到 p 的多重完整三角和的精确估计.当 $f(x)$ 的系数为实数,这种更广泛的指数和的研究是韦尔开始的,所以又称这种和为韦尔和.维诺格拉道夫创立了新的估计韦尔和的精密方法.他还创立了估计以素数为变数的指数和的方法,从而他用圆法关于哥德巴赫猜想证明了每个充分大的奇数都是三个素数之和,关于华林问题,他证明了,当 $s \geqslant s_0 \sim 2k\ln k$ 时,每个充分大的整数都是 s 个正整数的 k 次方幂之和.将华林问题与哥德巴赫问题结合起来,可以研究将整数 n 表为 $n = f(p_1) + \cdots + f(p_s)$ 的问题,此处 $f(x)$ 为给定的 k 次整值多项式,$p_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 为素数.华罗庚对这一问题进行了系统的研究.除个别结果外,关于华林问题的结果,都可以推广到这个问题.

另一个研究哥德巴赫猜想的方法是厄拉多塞筛法的改进,这一方法的研究是布鲁恩开始的,用这一方法,目前所得到的最佳结果是陈景润证明的,即每个充分大的偶数都是一个素数及一个不超过 2 个素数的乘积之和.

由 $\pi(x)$ 的研究可以看出,不同深度的方法得出不同深度的结果.还可以举整数分析问题为例.命 $p(n)$ 表示将 n 分拆为整数和的方法数.用简单的算术方法可以得出 $p(n)$ 最粗略的估计,$2^{[\sqrt{n}]} \leqslant p(n) < \pi^{3(\sqrt{n})}(n > 1)$.再用初等的分析方法可以证明,$\ln p(n) \sim \pi\sqrt{2/3}n^{1/2}$.更深入用所谓陶伯型定理就可以得出 $p(n)$ 的渐近表达式.最后,用高深的模函数论结果及解析数论方法还可以求出 $p(n)$ 之展开式,在这逐步求精的方法中,容易看出各种不同方法之精度.

另一方面,虽然有的问题已经由分析方法加以解决,但寻求一个

算术的解决方法或较初等的分析解决方法仍为很重要的事.例如,寻求素数定理的初等分析证明,即不依赖于 $\zeta(s)$ 零点分布成果的证明,是素数论中历时很久的问题之一.这一证明是由塞耳伯格与欧道什得到的.

又如蒂德曼用盖尔丰德 — 巴克尔方法基本上解决了卡塔兰猜想,即方程 $x^m \pm y^n = 1$ 的整数解适合于 $|x^m| < C$,此处 C 是一个绝对常数.但在这之前,柯召曾用初等方法证明,方程 $x^2 = y^n + 1$ 只有整数解 $x = \pm 3, y = 2, n = 3$.

正因为数论问题很具体与特殊,所以在数论中发展起来的各种方法常常是很强有力的.例如,指数和的估计方法与筛法在理论物理学、概率统计和组合论中都有重要的应用.

首项系数为 1 的整系数方程的根称为代数整数,例如普通整数,$\sqrt{2}, i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等都是代数整数.代数数论研究比普通整数更广泛的集合即代数整数集合.

在研究代数数论时,首先要引入代数数域的概念,所谓数域,是一个在其中加、减、乘、除自封的复数的集合,例如有理数的全体 Q 构成一个域.Q 添加一个代数数 a,即得代数数域 $Q(a)$.$Q(a)$ 中的代数整数的全体 R,关于加、减、乘(除法除外)自封,构成一个环.算术基本定理对于一般代数整数是不成立的,例如对于任何正整数 n 皆有 $2 = 2^{1/2}2^{1/4}\cdots 2^{1/2^n}$.即使限制于某一代数数域,算术基本定理仍可能不成立.例如对于域 $Q(\sqrt{5})$ 有 $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$.在引入"理想数"这一概念之后,就可得唯一因子分解定理.所谓理想数是 R 的子集合 $\mathfrak{a}$,它关于加、减法自封,且 R 的元素乘以 $\mathfrak{a}$ 的元素仍属于 $\mathfrak{a}$.例如 R 的一个元素 X 生成的集合 XR 即为一个理想数,这种理想数称为主理想数.可以定义理想数之间的乘法及素理想数,并且可以证明算术基本定理对于理想数是成立的.

在代数数域 $Q(a)$ 中存在一组代数整数 $Q_1, \cdots, Q_n$ 使 R 中任何元素 U 皆可以唯一表成 $U = C_1Q_1 + \cdots + C_nQ_n$，此处 $C_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为普通整数. $Q_1, \cdots, Q_n$ 称为 $Q(a)$ 的整底.

如果 U 与 $1/U$ 都属于 R，则称 U 为 $Q(a)$ 的单位，除 1 的单位根外，R 中常常还有其他单位. 命 a 的定义方程有 r_1 个实根，r_2 对复根，又置 $r = r_1 + r_2 - 1$，狄利克雷证明了在 R 中存在 r 个单位 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 使 R 中任何单位 ϵ 都可以唯一地表成 $\epsilon = \zeta\eta_1^{a_1}\cdots\eta_r^{a_r}$，此处 ζ 为单位根，而 $a_j(1 \leqslant j \leqslant r)$ 均为普通整数. $\eta_1, \cdots \eta_r$ 称为 $Q(a)$ 的基本单位组.

还可以定义分数理想，即理想中含有非代数整数之元素. 这些理想构成一个群. 它关于主理想构成的子群的商群叫做类群. 闵可夫斯基证明了类群是有限群. 类群的元素个数称为代数数域的类数. 类数为 1 的代数数域中，代数整数有唯一因子分解定理. 一般代数数域的类数是很难具体算出来的. 对于虚二次域 $Q(\sqrt{m})$，斯塔克与巴克尔证明了，只有当 $m = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ 与 163 时，$Q(\sqrt{m})$ 的类数为 1. 高斯曾猜测有无穷多个实二次域有类数 1，这是尚未解决的难题.

研究两个代数数域 F 与 L，此处 L 为 F 的代数扩张，有一种代数数域 L 特别重要，即 L 关于 F 的维数等于 F 的类数，而且 F 的任何理想在 L 中都是主理想，则 L 称为 F 的类域. 类域理论的研究是代数数论的一个重要课题.

代数数论的重要不仅在于它是弄清普通整数的某些规律所不可少的，而且在于它的成就几乎可以用到每一个数学领域中去.

近 30 年来，电子计算机的产生与发展给科学技术带来了无比巨大而深刻的变革，这使数论有了非常广阔的直接应用途径. 众所周知，无论什么问题必需离散化之后才能在计算机上进行数值计算，所以离散数学日益重要，而离散数学的基础之一就是数论. 又如近 20

年发展起来的高维数值积分的数论网格法的研究中,数论成果被广泛运用到.一致分布理论,指数和估计,经典代数数论都被用到,甚至丢番图逼近论中深刻的施密特关于代数数的联立有理逼近定理也被用到.在编码和数字信号处理问题中,数论也有很重要的应用.随着科学的发展,数论除其在纯粹数学中的基础性质外,已日益展现出直接应用的途径.

数论在中国古代有着特别光彩而悠久的历史.数论的研究也是中国近代数学最早开拓的数学研究领域之一.杨武之、华罗庚、柯召、闵嗣鹤等人是这一领域在中国的创始人.特别是华罗庚在解析数论方面的卓越成就,在国际上有广泛而深远的影响,在他领导下,培养出一批优秀的数论学家,国际上称他们构成解析数论的中国学派.

数论在数学中的地位*

1,2,3… 这些简单的整数,从日常生活到尖端科学技术都离不开它们.其他的数字,如零、负整数、有理数与实数等,则都是以正整数为基础定义出来的.所以研究正整数的规律是非常基本与重要的.在数学中,研究数的规律,特别是研究整数性质的数学,叫做"数论".数论与几何学一样,既是最古老的数学分支,又是始终活跃着的研究领域.从方法上来讲,数论可以分成初等数论、解析数论与代数数论.

在数论研究中,往往先根据一些感性知识,小心地提出"猜想",然后再通过严格的数学推导来论证它.被证明了的猜想,就变成了"定理",但也有不少猜想被否定了.正因为不少猜想都是整数规律的描述,所以其含义非常明白浅显.似乎给人一种印象,即数论是数学中的一个孤立分支,数论问题又是一个个孤立的问题.又似乎只要从整数的定义出发,就可以"研究"数论了.否!数论是数学中不可分割的一部分,数论研究从一开始,就以它的问题、方法和概念影响着数学的其他部分的发展.另一方面,也屡见数学中其他部分的方法与结果帮助了数论解决其中的具体问题,并建立起整套的理论与方法.例如,大家所熟知的"哥德巴赫猜想",即每个大于 2 的偶数都是两个素数之和,简记为"(1 + 1)".180 年来,其证明毫无进展.直到本世纪 20 年代,英国数学家哈代与李特伍德才提出一个研究哥德巴赫问题的

---

* 发表于《百科知识》,5,1981,46 ~ 47.

方法，即所谓“圆法”. 这个方法是以数学分析、富利埃分析与复变函数论为其基本数学工具的. 在 20 年代，由挪威数学家布朗发展起来的“筛法”，虽然其原始思想可以追溯到公元前的埃拉朵斯染尼氏筛法，但在其改良的筛法及证明(9 + 9)(即每个充分大的偶数可以表为两个素因子个数不超过9的乘积之和)的过程中，是以数学分析为其数学工具的，并用到素数分布论的一些研究成果. 反过来，“圆法”又带动了作为精密分析方法的指数和估计的深刻研究与广泛应用. 筛法的应用更是非常广阔的，它在概率统计及组合论等数学分支中都有重要的应用. 大家所熟知的另一个经典问题“费马猜想”，即当 $n > 2$ 为整数时，任何正整数的 n 次幂都不能表为两个正整数的 n 次幂之和. 这一问题的巨大进展是数学家库末尔给出来的. 他在处理这个问题时，提出了“理想数”的概念与研究. 这一概念已经渗透到分析、代数、几何与泛函分析等领域，可以说是近代一切数学领域所不可少的. 我国数学家华罗庚说得好：“理想数之创造乃研究费马问题之产物，对数学之发展而言，此一概念之获得实远重要于解决一个难题.” 所以虽然哥德巴赫猜想与费马猜想至今都没有解决①，但在研究这些问题时所获得的方法与概念，对数学的推动却是巨大的. 总之，解决一些孤立的问题，决不是研究数论的唯一目的. 一方面，应该尽量将数学发展的新成就用来研究数论，使之达到一个新阶段，获得过去方法得不到的新结果. 例如，17 世纪以来将数学分析与复变函数论用于数论而建立起来的新数论分支解析数论，用分析方法得到的一系列结果是以往算术方法所望尘莫及的. 另一方面，应该尽量将数论的成果与方法广泛地用于其他数学分支中去，例如指数和的估计与筛法等.

从具体到抽象是数学发展的普遍规律. 整数 1,2,… 就可以看作

① 1996 年，瓦依斯证明了费马猜想.

一个人，二张桌子等等的抽象.抽象的目的在于寻求内容概括更为广泛的规律.但另一方面，具体的例子往往又是抽象概念的源泉，其所用的方法又往往是高深数学里所用方法的依据.由实际中来的问题与方法促进了数学发展的事实，在数学史上是屡见不鲜的，如力学与物理学的发展引起微积分学的产生与发展等等.但从纯粹数学来说，它研究的最基本的对象是"数"与"形".因此，由"几何图形"引出的几何直觉与由"数"引出的具体关系与概念，往往是数学中极为丰富的源泉、背景与实例.例如近代数学中的概念"群"、"环"、"域"、"理想"等，数论正是研究着它们的一些最常见而又重要的特例.它们的一些深刻性质在数论中被揭示.这里的结果与方法，常常构成了建立一般理论最良好与不可少的背景.可以说，对数论没有一定的了解，而去了解这些抽象理论，就似乎这些抽象"定义"都是无本之木与无源之水，更谈不上做什么深刻研究了.

数学家高斯说过："数学是科学中的皇后，数论是数学中的皇后."从数学在科学技术中与数论在数学中的广泛联系与它的基础性质这个意义上来说，高斯的话对数学与数论的地位作出了准确的形象性的定义.

以上的观点是从数论作为纯粹数学的角度而提出来的.近 30 年来，电子数字计算机的产生与发展，给科学技术带来无比巨大而深刻的变革，这更使数论有了非常广阔的直接应用.众所周知，无论什么问题必须离散化之后才能在机器上进行数值计算，所以离散数学日益显得重要.而离散数学的基础之一就是数论，其中很多方法也常常来源于数论.又如近 20 年来发展起来的高维空间定积分的近似计算数论方法的研究，数论中的连分数论，同余式论，一致分布论，指数和估计与经典代数数论都被广泛地使用着.甚至丢番图逼近论中最深刻的研究，即代数数的联立有理逼近定理，也得到了应用.所以随着科学的发展，数论的性质与地位也在变化着.除其在纯粹数学中的基

础性质外，已日益展现出直接应用的途径. 这是近 30 年的事.

数论在我国有着特别光荣与悠久的历史. 商高定理是早期的不定方程研究，孙子定理是线性同余式论的基础，祖冲之关于 π 的疏率与密率，则是丢番图逼近论的萌芽. 近代数论的研究，也是我国近代数学最早开拓的研究领域之一. 华罗庚是中国解析数论研究的创始人. 刚解放，他即从美国回到祖国，主持数学研究所工作并亲自兼管数论组. 在他领导下，培养出一批优秀的数论学家. 他与他的学生的贡献是世界公认的. 外国称他们构成解析数论的"中国学派". 这些年来，我国的数论工作在报刊上多次受到表扬，这是人民对数论工作者的鞭策与鼓励. 但也使不少人产生了误解，以为不必了解前人的成就，甚至不必学习初等数论与数学分析，就可以"研究" 数论. 为此我在 1978 年 8 月 18 日《光明日报》上发表的《关于哥德巴赫猜想》文章中曾写道："哥德巴赫猜想也像其他经典问题一样，它的一切成就，都是在前人成就的基础上，通过迂回的道路而得到的. 数学是一门很严格的学问. 现在有些同志，连数论的基础书都没有认真看过，就企图去证明(1 + 1)，这不仅得不到结果，浪费了宝贵的时间，反而把一些错误的推导与概念，误认为正确的东西印在脑子里，它对学习与提高都起着有害的作用. 我们要从中吸取有益的教训." 现在有必要再重申一遍，成千上万篇错误的稿件堆积如山，造成了巨大的时间与精力的浪费. 我们要冷静清醒，按科学规律办事.

总的来说，数论仍然是纯粹数学的一个分支，是属于数学的基础理论. 适于有一个少而精的队伍，有领导、有计划、有组织地进行工作. 必须指出，在我国应该有更多的人从事于研究更有直接应用价值的领域与课题，例如应用数学的研究. 这个道理大家都是很明白的.

代数数域中的丢番图方程与不等式*

圆法导源于Hardy与Ramanujan发表于1918年的一篇关于分拆函数及表整数为平方和问题的文章里.后来,从1920年开始,Hardy与Littlewood在总标题"*Some problems of 'partitio numerorum'*"的一系列文章里,系统地开创与发展了堆垒数论中的一个新的分析方法——圆法。在他们的文章中处理了堆垒数论中最有名的问题——华林问题与哥德巴赫问题.圆法亦可称为Hardy与Littlewood方法.

华林问题可以叙述于下:对于每一整数 $k \geqslant 2$,皆存在整数 $s = s(k)$ 使每一正整数 N 皆可以表示为

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k, \tag{1}$$

此处 x_i 为非负整数.这一论断是Hilbert于1909年首先证明的.

利用强有力的圆法,Hardy与Littlewood得到华林问题一个更深刻结果.他们建立了将 N 表示为形式(1)的表示法 $r_s(N)$ 的渐近公式:

$$r_s(N) = \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} \mathfrak{S}(N) N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1)), \tag{2}$$

此处 $s \geqslant (k-2)2^{k-1}+5$.这里的 $\mathfrak{S}(N)$ 被称为奇异级数,它有一个独立于 N 的正下界.命 $G(k)$ 表示最小的正数 s 使每一个大整数 N 均可以表为形式(1),则由(2)可以推出

---

* 见"Wang Yuan, Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields, Springer, 1991"之导言

$$G(k) \leqslant (k-2)2^{k-1}+5. \tag{3}$$

(2) 式的证明可以简单述于下：命

$$g(z)=\sum_{N=1}^{\infty} r_s(N) z^N=\Big(\sum_{x=1}^{\infty} z^{x^k}\Big)^s,\ |z|<1.$$

由 Cauchy 公式得

$$r_s(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z) z^{-N-1} \mathrm{d}z,$$

此处 Γ 表示圆 $|z|=\rho, 0<\rho<1$. 现在将 Γ 分成两部分. 粗略地说，一部分包括以 $\rho e(a/q),(a,q)=1$ 为中心的互不相交的弧，其中 q 比较"小"，而 $e(x)=e^{2\pi x}$. 这些弧的并 m 被称为"优弧". m 关于 Γ 的余集 m 则称为"劣弧". 我们称将 Γ 分成 m 与 m 的分割为一个 Farey 分割. 在 m 上的积分给出 $r_s(N)$ 的主项. 在 m 上的积分具有低阶这一事实可以由 Weyl 不等式给出. 这一不等式较不明显的形式是首先由 Weyl 在 1916 年关于模 1 的一致分布的一篇著名文章中首先发表的.

1928 年, Vinogradov 给出了圆法一系列重大改进，其中之一为将 $g(z)$ 换为有限指数和

$$h(z)=\Big(\sum_{x=1}^{T} e(x^k z)\Big)^s,\ \ T=[N^{1/k}].$$

对于整数 a，由正交关系

$$\int_0^1 e(az)\mathrm{d}z=\begin{cases}1, 当\ a=0,\\ 0, 当\ a\neq 0\end{cases}$$

可得

$$r_s(N)=\int_0^1 h(z) e(-zN)\mathrm{d}z.$$

关于圆法及其相关问题的进一步重大进展是 Vinogradov 于 30 年代给出的，这些成就都基于他关于指数和估计的天才方法. 特别，他的方法可以导至渐近公式(2) 对于

$$s \geqslant 2k^2(2\log k + \log\log k + 2.5), k \geqslant 11 \tag{4}$$

成立(Vinogradov 原来的结果为 $s \geqslant 10k^2\log k$,这一结果是华罗庚得到的,近来 Wooley 将它改进为 $s \geqslant s_0 \sim 2k^2\log k$) 及

$$G(k) \leqslant 2k\log k + 2k\log\log k + 12k. \tag{5}$$

最近,Wooley 作了下面本质的改进:

$$G(k) \leqslant k\log k + k\log\log k + O(k).$$

对于小的 k,由华氏不等式

$$\int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{T} e(x^k z)\right|^{2^k} dz \ll T^{2^k - k + \varepsilon}, \tag{6}$$

可以推出当

$$s \geqslant 2^k + 1 \tag{7}$$

时,(2) 式成立.这一结论最近已由 Vaughan 将它改进为 $s \geqslant 2^k (k \geqslant 3)$ 及 Heach - Brown 改进为 $s \geqslant \frac{7}{8}2^k + 1 (k \geqslant 6)$.

Linnik 给出了 Hilbert 定理一个新的初等证明.它是基于 Schnirelman 关于自然数列的密度方法.诚如 Davenport 指出,证明的想法无疑受到 Hardy - Littlewood 方法某些性质的启发,特别是华氏不等式.

除了奇异级数的估计外,将圆法拓广了来处理下面更为广泛的堆垒型方程是没有本质困难的:

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s), \tag{8}$$

其中 $f_i(x)$ 为 k 次整值多项式,其首项系数为正的,我们对加型方程

$$a_1 x_1^k + \cdots + a_s x_s^k = 0 \tag{9}$$

格外有兴趣,此处诸 a_i 为自然数.

利用圆法的变体,Davenport 与 Heilbronn 可以处理加型丢番图不等式.他们证明了不等式

$$| \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_5 x_5^2 | < 1$$

有一个非寻常解，此处 $a_1,\cdots,a_5$ 为不完全同号的实数．以后，Davenpovt 与 Ridout 又证明了同样结论对于不少于 21 个变数的一般二次不定型成立．一个重要的未解决的问题为证明若系数不都成有理比例，则上述结论对于 3 个变数即成立．这一问题最近已被 Margulis 解决．

用圆法处理非堆垒型方程是困难的．Brauer 给出了第一个本质的进展．他证明了，若 F 是一个域及当 $k\geqslant 1$ 时，存在一个常数 $c_1(k,F)$ 使方程(9)有一个非寻常解，其中(9)的系数属数 F，且 $s\geqslant c_1$，则每一个系数属于 F 的 k 次型 $f(x_1,\cdots,x_s)$ 在 F^s 中有一个非寻常零点，其中 $s\geqslant c_2(k,F)$．Brauer 方法可以描述为纯粹的代数的"对角化"过程．Brauer 的结果不能用于有理数域，这是由于偶次加型方程在 F^s 中可以没有非寻常解．但是 Birch 可以证明，若 Brauer 定理中的假定对于所有奇数 k 成立，则结论就对所有奇次型成立．因此他证明了，若 $f(\underline{x})$ 为一个有理系数的 k 次型，其中 k 为奇数及变数 $s\geqslant c_3(k)$，则 $f(\underline{x})$ 在 Z^s 中有一个非寻常零点．Davenport 证明了 $c_3(3)\leqslant 16$．以后，Heath - Brown 又对于非奇异的三次型，将 16 减为 10．

实系数的型就更难于处理了，Schmidt 证明了下面惊人的定理：若 $f(\underline{x})$ 为一个实系数，奇次数 k 及变数个数 $s\geqslant c_4(k)$ 的型，则存在一个整点 $\underline{x}\in Z^s$，$\underline{x}\neq\underline{0}$ 使 $|f(\underline{x})|<1$．若 $f(\underline{x})$ 的系数为整数，则由此立即推出 Birch 定理．进而言之，Schmidt 证明了下面的结果：

命 $f_i(\underline{x})=f_i(x_1,\cdots,x_s)(1\leqslant i\leqslant h)$ 为实系数，次数 $\leqslant k$ 的奇次型．给予正数 E，无论多大，皆存在常数 $c_5(k,h,E)$ 具有下面性质：命 $T>0$ 及 $s\geqslant c_5$，则存在一个非零整点 $\underline{x}\in Z^s$ 满足

$$|\underline{x}|\leqslant T,\ |f_i(\underline{x})|\ll T^{-E}|f_i|,1\leqslant i\leqslant h, \quad (10)$$

此处 $|\underline{x}|=\max|x_i|$ 及 $|f|$ 表示 f 的系数的最大绝对值．

假定 $f_i(\underline{x})(1\leqslant i\leqslant h)$ 的系数取自 Z，则由上面的定理可以推出下面的结果：对于任何 $\varepsilon>0$，皆存在一个常数 $c_6(k,h,\varepsilon)$，使当 $s\geqslant c_6$ 时，皆存在一个非零整点 $\underline{x}\in Z^s$ 适合

$$|\underline{x}|\ll F^{\varepsilon}, f_i(\underline{x})=0, 1\leqslant i\leqslant h, \tag{11}$$

此处 $F=\max(1,|f_i|)$.

Schmidt 定理证明中的第一步为对于一个加型方程来证明(11). 尽管在他的证明中用到了圆法，但在劣弧的处理方法上是与华林问题两样的. 第二步为将 Davenport 与 Heilbronn 关于圆法的变体用于单个的加型来证明(10)，在此他运用了他处理"劣弧"时的新方法及系数的有理逼近. 最后，他用精密化了的 Brauer - Birch 对角线方法来证明(10). 上述就是代数数域上丢番图方程与不等式理论的背景.

早在 1922 年，Siegel 就有兴趣于将圆法推广至任意 n 次代数数域K，并试图解决华林问题在代数数域中的类似. 由下面的例子使 Siegel 注意到代数数域中的华林问题与有理数域中的情况是不同性质的. 命 $Q(\sqrt{d})$ 为一个二次域，其中 $d\equiv 2,3(\bmod 4)$. 这一域中的整数取形式 $a+b\sqrt{d}$，此处 $a,b\in Z$. 这种整数的平方的第二个系数恒为偶数，所以第二个系数为奇数的整数都不能表为整数之平方和. 这就使 Siegel 不去考虑 K 的整数环J，而只考虑由整数的 k 次幂生成的环 J_k. 1922 年，Siegel 首先成功地处理了在 K 中整数分拆成平方和问题. 最后于 1944 ~ 45 年，他建立了 K 上一般的圆法并证明了当 $s\geqslant(2^{k-1}+n)kn$ 时，K 上对应于(2) 的华林问题结果. 早在 20 年代，Siegel 由于未能克服 Farey 分割成优弧与劣弧的推广，从而未能建立起 K 上的圆法. Siegel 的结果在各个方面得到了 Ayoub, Birch, Eda, Körner, Mitsui, Peck, Stemmler, Subbarao, Tatuzawa 与王元等人的推广与改进.

Rieger 推广了 Schnirelman 方法，并且证明了，对于任意代数数

域 K,$c_7(k)(=8^{k-1}/2)$ 个 K 中全非负整数之 k 次幂之和构成的集合在 J_k 中有正密率.有兴趣的是 c_7 与 K 的次数无关.

命 K 为一个纯虚代数数域(即 K 没有实共轭域),其次数为 $2r$.命其整数环为 J.利用 Siegel 方法,Peck 证明了,对于每一个 $k \geqslant 1$,皆存在常数 $c_8(k,r)$,使当 $s \geqslant c_8$ 时,系数属于 J 的方程(9) 皆在 J^s 中有一个非寻常解.因此由 Brauer 定理立即推出,任意系数属于 J 的 k 次型 $f(\underline{x}) = f(x_1,\cdots,x_s)$,只要当 $s \geqslant c_9(k,K)$ 时,即在 J^s 中有一个非寻常零点.将 Schmidt 方法与 Siegel 方法结合起来,我们可以证明下面的结果:

命 $f_i(\underline{\lambda}) = f_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)(1 \leqslant i \leqslant h)$ 为复系数,次数 $\leqslant k$ 的型.给予正数 E,无论多大,皆存在一个常数 $c_{10}(k,h,r,E)$ 具有下述性质:命 $T \geqslant 1$ 及 $s \geqslant c_{10}$,则存在一个非零点 $\underline{\lambda} \in J^s$ 满足

$$\|\underline{\lambda}\| \leqslant T,\quad |f_i(\underline{\lambda})| \ll T^{-E}|f_i|,\quad 1 \leqslant i \leqslant h, \tag{13}$$

此处 $\|\underline{\lambda}\|$ 表示 $\underline{\lambda}$ 的支量及其共轭数的最大绝对值.

Hardy – Littlewood 方法及其相关问题的成就已经含于很多书上了,特别是熟知的 Vaughan 的剑桥丛书之一对于圆法迄今的重大成就作了很好的总结并含有完备的文献.关于有理情况,Schmidt 对于丢番图方程与不等式的方法在熟知的 Baker 的近著中作了详细介绍.所以本书只列举了有关 Hardy – Littlewood 方法及其应用方面很少几篇文献.

本书的目的为给予 Siegel 广义圆法及其在华林问题与加型方程方面的应用一个综述.我们亦讨论了代数数域中,Schmidt 关于多变元丢番图方程与不等式的方法.第 1 章处理了 Hardy – Littlewood 方法及其在华林问题上的应用,其中将证明(2) 对于 $s \geqslant 2^k+1$ 成立.指数和的估计在数论中处于重要地位,在 Hardy – Littlewood 与 Siegel 圆法中尤其如此,第 2 ~ 4 章将讨论指数和估计,第 5 ~ 8 章将

论述 Siegel 方法及其对华林问题与加型方程的应用，其中还包括 Schnirelman—Lınnik—华罗庚—Rieger 关于华林问题的方法．最后，第9～11 章将论述代数数域上丢番图方程与不等式的小解的 Schmidt 方法．

由于 Hardy—Littlewood 方法有很多重要结果在代数数域中尚无类似，所以要建议一些待解决的问题反而感到很困难．用一些篇幅来论述低次方程的工作，同余式的最小解及代数数域中的 Vinogradov—Goldlach 定理的研究仍然是应该的与有意义的，但这样做将会使本书的篇幅大为加大．有兴趣的读者可以参看有关的文献．

我们只需要读者熟悉初等数论及代数数域的经典理论．这样的背景知识读者可以从华罗庚的书《数论导引》(科学出版社，1957) 与 E.Hecke 的书 Lectuses on Theory of Algchraıc Numkecs(Springer, 1980) 中找到．

最后，我愿意借此机会对 Schmidt 教授的有价值的建议与帮助表示感谢，同时还要对审查者表示感谢，特别是向肖文杰博士表示感谢，感谢他们给予的建议与改进意见．感谢 Springer 出版社在出版过程中的帮助．

数值分析中的数论方法*

一　导　言

由于电脑技术的快速发展与应用，大约在三十年前，数学家即热心于将数论用于近似分析．从应用与理论来说，所取得的成就都是很重要与满意的．数论的许多领域，如丢番图逼近论，一致分布论与代数数论，均在解决计算问题方面取得了成功的应用．

我们将给出数论方法在数值积分及其有关领域的若干应用．从17世纪起到现在，有一系列工作去发展单重积分的近似计算方法，直到本世纪50年代，才有一点点关于多重积分近似计算的工作．但是在过去的三十年里，有不少多重积分近似计算的新方法被建议出来，其中数论方法被证明是很有效的．

最简单的情形是估计定积分

$$I(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s$$
$$=\int_{G_s} f(\underline{x})\mathrm{d}\,\underline{x},\qquad(1)$$

此处 G_s 表示 s 维单位立方体及 $\underline{x}=(x_1,\cdots,x_s)$.

---

* 原发表于 Contemporary Mathematics, Vol 77, AMS, 1988, 63 ~ 81, Ediled by Y. Wang, CC. Yang, C. B. Pan. 本文为发表于 Recent Progress in Analyfic Number Theory, edited by Halberstam and Hooley, Acad. Press, 1981, L. K. Hua and Y. Wang"Applications of number Theory to wunejcal analysis" 的补充与改写.

假定

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_1 \cdots \partial x_s}$$

及其低维导数都是 s 个变数的周期函数，且囿于 C，每个变数均有周期 1.

最自然地处理 $I(f)$ 的方法为将这一积分看成 s— 重叠次积分并将单重积分求积公式分别用于每 一个变数. 例如由单重积分的梯形公式，即得梯形公式的乘积公式. 我们用

$$\frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m},\cdots,\frac{l_s}{m}\right) \tag{2}$$

来逼近(1)，此处 $n = m^s$. 可以证明(1) 与(2) 之间的误差不能比

$$O(Cn^{-1/s}) \tag{3}$$

更好，当 s 增加时，(3) 增大得是很快的.

一个全新的处理多重求积公式的方法是 40 年代由 S. Ulam 与 J. Von Neumann 所发展的蒙特卡罗(Monte Carlo) 方法. 蒙特卡罗方法的基本想法为将一个分析问题转化为一个有同样解答的概率问题，然后用统计实验方法来研究后面这一问题. 这已成为计算多重积分的常用的标准数值方法，复杂被积函数的积分法，舍此似别无其他途径.

假定 $\underset{\sim}{x} = (x^1, \cdots, x^s)$ 为一个随机变数，它在 G_s 上均匀分布，则 $f(\underset{\sim}{x})$ 也是一个随机变数，其均值与标准离差分别由

$$m(f(\underset{\sim}{x})) = \int_{G_s} f(\underset{\sim}{x})\mathrm{d}\underset{\sim}{x}$$

与 $$\sigma(f(\underset{\sim}{x})) = \left[(m(f(\underset{\sim}{x})^2) - m(f(\underset{\sim}{x})^2)\right]^{1/2}$$

给出. 如果我们取 $\underset{\sim}{x}$ 的 N 个独立样本 $\underset{\sim}{x}_1, \cdots, \underset{\sim}{x}_N$ 并组成和式

$$J(f,N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\underset{\sim}{x}_i), \tag{4}$$

则我们有理由希望它接近于 $f(\underline{x})$ 的均值.熟知至少当 N 较大时,J 近似于正态分布,所以可以说,例如

$$|J(f,N)-I(f)|\leqslant 2\sigma(f)N^{-1/2} \tag{5}$$

的概率约为 0.95.尽管(5)中误差项 $O(N^{-\frac{1}{2}})$ 远比梯形乘积公式为优,但它是概率意义而不是通常的绝对误差.

多重积分数值计算的数论方法基于一致分布理论(Weyl〔1〕).我们用 $\underline{\gamma}$ 表示一个实支量的矢量及 $|\underline{\gamma}|=\gamma_1\cdots\gamma_s$.命 $n_1<n_2<\cdots$ 为一个正整数贯.命

$$P_{n_l}(k)=(x_1^{(n_l)}(k),\cdots,x_s^{(n_l)}(k)),\ \ 1\leqslant k\leqslant n_l$$

为 G_s 中的一个点集,对于 $\underline{\gamma}\in G_s$,命 $N_{n_l}(\underline{\gamma})$ 表示 $P_{n_l}(k)(1\leqslant k\leqslant n_l)$ 中满足不等式

$$0\leqslant x_i^{(n_l)}(k)<\gamma_i,1\leqslant i\leqslant s$$

的点数.进而言之,命

$$\sup_{\underline{\gamma}\in G_s}\left|\frac{N_{n_l}(\underline{\gamma})}{n_l}-|\underline{\gamma}|\right|=D(n_l).$$

如果 $D(n)=o(1)$(当 $n\to\infty$),则称点集贯 $(P_{n_l}(k))(n_1<n_2<\cdots)$ 一致分布且有偏差 $D(n)$,或简单称集合 $P_n(k)(1\leqslant k\leqslant n)$ 有偏差 $D(n)$.今后我们常常略去指标 l.

已知 K.F.Roth〔1〕证明了

$$D(n)\geqslant c(s)\frac{(\log n)^{(s-1)/2}}{n}.$$

因此如果 $P_n(k)(1\leqslant k\leqslant n)$ 的偏差满足

$$D(n)=O(n^{-1+\varepsilon}),$$

此处 ε 为任意给予正数,则称集合 $P_n(k)(1\leqslant k\leqslant n)$ 为最佳一致分布.

对于任何集合 $P_n(k)(1\leqslant k\leqslant n)$,我们可以用

$$J_1(f, p_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_n(k)) \tag{6}$$

来逼近多重积分 $I(f)$. $I(f)$ 与 $J_1(f, P_n)$ 之差可以证明适合关系式

$$|I(f) - J_1(f, p_n)| \leqslant C2^s D(n), \tag{7}$$

(Sobol[1], Hlawka[1]), 因此寻找最佳求积公式问题就等价于寻求最佳一致分布点集贯问题.

令人惊奇的是数论方法可以用来构造多种偏差适合 $D(n) = O(n^{-1+\epsilon})$ 的一致分布点集贯. 这都是臻于至善的, 它比蒙特卡罗方法中的概率误差更好. 从近似分析的观点看, 我们不仅要求集合 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的偏差小, 而且要求 $P_n(k)$ 便于计算. 现在我们来介绍由 Korobov(1959)[1,3] 与 Hlawka(1962)[2] 独立引进的集合如下: 命

$$Q_n(k) = \left(\left\{\frac{a_1 k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{n}\right\}\right), 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{8}$$

此处 $\{x\}$ 表示 x 的分数部分. 假定 $n = p$ 为一个素数, 则他们证明了存在一个整数矢量 $\underline{a} = \underline{a}(p)$ 使集合(8) 有偏差

$$D(n) = O(n^{-1}(\log n)^s). \tag{9}$$

因此集合(8) 对于 $n = p$ 是最佳一致分布的. 进而言之, $Q_n(k)$ 的构造很简单且便于应用. 如果集合(8) 具有偏差(9), 则 $\underline{a}(n)$ 称为模 n 的极值系数或模 n 的好格点. 1978 年, Niederreither[1] 将 Korobov 与 Hlawka 的结果推广到任意自然数 n.

对于给予 $n = p$, Korobov[2,3] 证明了需要

$$O(n^2) \tag{10}$$

次初等运算才能得到矢量 $\underline{a} = \underline{a}(n)$. 当 n 较大时, 运算量可以降低为 $O(n^{4/3})$. 无论如何, 从近似分析的观点看, Korobov 的结果只是一条存在性定理. 所以数值积分法的中心问题之一似乎是寻求一个获得极值系数的直接方法.

当 $s=2$ 时，华罗庚与王元[1]及 Bahvalov[1]在1959年独立地证明了若取 $n=F_m$，则 $a_1=1$ 与 $a_2=F_{m-1}$ 即模 F_m 的极值系数，此处 (F_m) 为通常的斐波那契(Fibonacci)贯，即由递推公式

$$F_0=0, F_1=1, F_{m+1}=F_m+F_{m-1}\quad (m\geqslant 1)$$

定义的整数贯，可以证明

$$F_m=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right), m=0,1,2,\cdots.$$

显然只需

$$O(\log F_m) \tag{11}$$

次初等运算即能得到 F_m，并得到求积公式

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \frac{1}{F_m}\sum_{k=1}^{F_m} f\left(\frac{k}{F_m},\left\{\frac{F_{m-1}k}{F_m}\right\}\right)=O\left(\frac{\log F_m}{F_m}\right).$$

欲将这一方法推广至 $s(>2)$ 维的情况，我们仅需推广 F_m. 首先注意到分数 F_{m-1}/F_m 是黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos 2\pi/5$ 的渐近分数. 命 p 为一个素数 $\geqslant 5$. 考虑分圆域 $Q(\cos 2\pi/p)$，它有整底

$$\omega_l=2\cos\frac{2\pi l}{p},\ 1\leqslant l\leqslant s,\ s=\frac{p-1}{2}.$$

我们可以建议一个程序来寻找整数集 $(h_1,\cdots,h_{s-1};n)$ 的贯满足：

$$\left|\omega_l-\frac{h_l}{n}\right|=O(n^{-1-(1/(s-1))}),\ 1\leqslant l\leqslant s-1. \tag{12}$$

$(1,h_1,\cdots,h_{s-1})$ 就可以看作模 n 的"极值系数". 我们可以证明集合

$$\left(\frac{k}{n},\left\{\frac{h_1k}{n}\right\},\cdots,\left\{\frac{h_{s-1}k}{n}\right\}\right),\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{13}$$

有偏差

$$O(n^{-1/2-((1/2(s-1))+\varepsilon)}), \tag{14}$$

此处 ε 为任意给予的正数. 得到这样一个集合只需

$$O(\log n) \tag{15}$$

次初等运算(见华罗庚与王元[2,3,4,5,6]及王元,徐广善与张荣肖[1]).

关于寻求极值系数的分圆域方法与 Korobov 方法,Haber[1]作了比较,他写道:

"Korobov 方法需要 An^2s 秒以求出 $\underline{a}(n)$ 及所有的 $s' \leqslant s$,此处 A 约为 10^{-5},计算是在 UNIVAC1108 上进行的.这一方法当 $n \leqslant 10^4$ 及 s 在 10 与 20 之间时较理想,结果较佳.但使人迟疑者为当 s 高达 10 时的实际应用公式中,往往要求 n 的阶为 10^5 或更高,从而计算变得过于冗长."

"第三个方法(分圆域方法)需要 As^3 秒,仅有的较长计算为求解一个线性方程组,A 约为 10^{-3} 或更小一点.当 s 在 100 之内,计算应该是没有障碍的,而 n 可以任意大."

二 丢番图逼近与一致分布

命 $\mathscr{F}_s$ 为一个关于有理数域 Q 的 s 次代数数域.置 $s = r_1 + 2r_2$.对于 $\alpha \in \mathscr{F}_s$,命 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(s)}$ 为 α 的共轭数,此处 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(r_1)}$ 为实数,$\alpha^{(r_1+1)}, \cdots, \alpha^{(r_1+r_2)}$ 为复数及 $\alpha^{(r_1+r_2+1)} = \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \cdots, \alpha^{(r_1+2r_2)} = \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$.

引理 1 置 $r = r_1 + r_2$,命 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 为一组实数且满足

$$\sum_{j=1}^{r_1} \gamma_j + 2\sum_{j=r_1+1}^{r} \gamma_j = 0, \tag{16}$$

则存在一个单位 $\eta \in \mathscr{F}_s$ 满足

$$c(\mathscr{F}_s)^{-1} e^{\gamma_i} \leqslant |\eta^{(i)}| \leqslant c(\mathscr{F}_s) e^{\gamma_i}, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

此处我们用 $c(f, \cdots, g)$ 表示仅依赖于 $f, \cdots, g$ 的正常数,但并不总取同一值(见华罗庚与王元[6]).

对于一个实代数数域$\mathscr{F}_s$，即 $r_2 = 0$，置 $\gamma_1 = r, \gamma_2 = \cdots = \gamma_r = \bar{\gamma}$，则(16) 变成

$$\gamma + (s-2)\bar{\gamma} = 0 \text{ 或 } \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{s-1},$$

因此我们得到：

引理 2 命$\mathscr{F}_s$为一个实代数数域，则对于任何实数 γ，皆存在单位 $\eta \in \mathscr{F}_s$ 使

$$c^{-1}e^{\gamma} \leqslant \eta \leqslant ce^{\gamma} \text{ 及 } c^{-1}e^{-\gamma/(s-1)} \leqslant |\eta^{(i)}| \leqslant ce^{-\gamma/(s-1)},$$
$$2 \leqslant i \leqslant s \tag{17}$$

成立，其中 $c = c(\mathscr{F}_s)$.

命 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 为$\mathscr{F}_s$的一组整底，则由引理 2 可知存在一个单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 满足

$$\eta_l \geqslant l, \ |\eta_l^{(i)}| \leqslant c(\mathscr{F}_s)\eta_l^{-1/(s-1)}, 2 \leqslant i \leqslant s. \tag{18}$$

置

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{s} \eta_l^{(i)} \text{ 及 } h_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{s} \eta_l^{(i)}\omega_j^{(i)}, 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{19}$$

则 η_l 与 $h_j^{(l)} (1 \leqslant j \leqslant s)$ 都是有理整数.

定理 1 我们有下面的联立有理逼近

$$\left|\frac{h_j^{(l)}}{n_l} - \omega_j\right| \leqslant c(\mathscr{F}_s) n_l^{-1-(1/(s-1))}, \ 1 \leqslant j \leqslant s,$$
$$l = 1, 2, \cdots. \tag{20}$$

证：为简单计，我们略去指标 l，由(18) 与(19) 得

$$n = \eta + O(\eta^{-1/(s-1)}) = \eta(1 + O(\eta^{-1-(1/(s-1))}))$$

与

$$h_j = \eta\omega_j + O(\eta^{-1/(s-1)}) = \eta\omega_j(1 + O(\eta^{-1-(1/(s-1))})).$$

故得定理.

定理 1 不是新结果. 经典方法只能证明存在有无穷多集$(h_1, \cdots,$

$h_s;n$)满足(20).我们的目的为建议一个得到满足(20)的($h_1,\cdots,h_s;n$)的算法.我们的方法依赖于一个满足(18)的单位贯 η_l.如果已知 $\mathscr{F}_s$ 的一个独立单位组,则这一单位贯易于被得到.

例 1 命 p 为一素数 $\geqslant 5$ 及 $s=(p-1)/2$,则 $R_s=Q\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$为一个 s 次实分圆域,它有整底

$$\omega_l=2\cos\frac{2\pi l}{p},1\leqslant l\leqslant s$$

及一组独立单位

$$\varepsilon_j=\sin\frac{\pi}{p}g^{j+1}/\sin\frac{\pi}{p}g^j,\ 1\leqslant j\leqslant s-1,$$

此处 g 为 $\bmod p$ 的一个原根.因此我们可得一个满足(18)的单位贯,从而可得一个整数集贯($h_1^{(l)},\cdots,h_s^{(l)};n_l$)($l=1,2,\cdots$)满足

$$\left|\frac{h_j^{(l)}}{n_l}-2\cos\frac{2\pi j}{p}\right|=o\left(n_l^{-1-(1/(s-1))}\right),\ 1\leqslant j\leqslant s-1,$$

$$l=1,2,\cdots.$$

我们可以用 Schmidt 定理[1]证明下面的定理:

定理 2 命 $\mathscr{F}_s$ 为一个 s 次实代数数域及 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一个整底,则集合

$$(\{\omega_1k\},\cdots,\{\omega_{s-1}k\}),1\leqslant k\leqslant n \tag{21}$$

有偏差 $D(n)=O(n^{-1+\varepsilon})$.

定理 3 命($h_1,\cdots,h_{s-1};n$)为一组满足(20)的整数,则集合

$$\left(\frac{k}{n},\left\{\frac{h_1k}{n}\right\},\cdots,\left\{\frac{h_{s-1}k}{n}\right\}\right),\ 1\leqslant k\leqslant n \tag{22}$$

有偏差

$$D(n)=O\left(n^{-1/2-(1/2(s-1))+\varepsilon}\right).$$

我们也可以从一个代数数出发或由代数数域 $Q(\alpha)$ 的一个单位 α 出发并置 $\eta_l=\alpha^l$.特别,我们可以取 α 为一个 s 次的 PV(Pisot -

Vijayaraghavan) 数，即 $\alpha(=\alpha^{(1)})$ 是一个满足

$$\alpha>1 \text{ and } |\alpha^{(2)}|\leqslant|\alpha^{(3)}|\leqslant\cdots|\alpha^{(s)}|<1 \tag{23}$$

的代数数.假定 α 是一个 PV 数并命

$$\rho=-\log|\alpha^{(s)}|/\log\alpha, \tag{24}$$

则

$$n_l=\sum_{i=1}^{s}\alpha^{(i)l}$$

为一个有理整数及

$$\frac{n_{l+k}}{n_l}=\frac{\alpha^{l+k}(1+O(\alpha^{-l}|\alpha^{(s)}|^l)}{\alpha^l(1+O(\alpha^{-l}|\alpha^{(s)}|^l)}.$$

因此我们得到

定理 4 命 α 为一个 s 次 PV 数，则

$$\left|\frac{n_{l+k}}{n_l}-\alpha^k\right|=o(n_l^{-1-\rho}),1\leqslant k\leqslant s-1. \tag{25}$$

若 α 适合既约方程

$$f(x)=x^s-a_{s-1}x^{s-1}-\cdots-a_1x-a_0=0,$$

则 n_l 可以由牛顿(Newton)关于对称函数的公式来计算，即

$$n_0=s,n_1=a_{s-1},\cdots,n_{s-1}=a_{s-1}n_{s-2}+\cdots+a_1n_0$$

与

$$n_l=a_{s-1}n_{l-1}+a_{s-2}n_{l-2}+\cdots+a_1n_{l-s+1}+a_0n_{l-s}$$
$$(l\geqslant s).$$

因 $\rho\leqslant\frac{1}{s-1}$，所以除去 α 为一个二次代数数或 α 为三次代数数及 $\alpha^{(2)}$ 与 $\alpha^{(3)}$ 为一对复共轭数之外，这一方法总比前面的方法次精密一些(见 Minkowshi[1]).无论如何，由于诸 n_l 满足一个递推公式，所以计算更为简便.

例 2 命(F_n)为由

$$F_0=F_1=\cdots=F_{s-2}=0,F_{s-1}=1,F_{n+s}=F_{n+s-1}+\cdots$$

$$+ F_{n+1} + F_n (n \geqslant 0)$$

定义的整数贯,则得

定理 5 有

$$\left| \frac{F_{n+k}}{F_n} - \eta^k \right| = O(F_n^{-1-(1/2^s \log 2)-(1/2^{2s+1})}),$$

$$1 \leqslant k \leqslant s - 1, \tag{26}$$

此处 η 为 $x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的实根.

定理 6 集合

$$\left(\frac{k}{F_n}, \left\{ \frac{F_{n+1} k}{F_n} \right\}, \cdots, \left\{ \frac{F_{n+s-1} k}{F_n} \right\} \right), 1 \leqslant k \leqslant F_n \tag{27}$$

有偏差. $D(F_n) = O(F_n^{1/2-(1/2^{s+1} \log 2)-(1/2^{2s+3})})$.

三　求积公式的数值误差

由(7)与定理 2,3 及 6,我们可得对应的求积公式的误差估计.但每一公式中的误差项都是非有效的(ineffective),即隐含于定理 2,3 及 6 中与“O”有关的常数是不可计算的.有时虽然误差项是有效的,例如(9)中的常数,但又太大,从而在实际应用时是无用的.所以我们将要讲述一个估计求积公式数值误差的方法.假定

$$\frac{\partial^{2s} f}{\partial x_1^2 \cdots \partial x_s^2}$$

及其低次导数都是 s 个变数的周期函数且囿于 C,每一变数均有周期 1,则 f 有绝对收敛的 Fourier 展开

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} c(m_1, \cdots, m_s) \\ &\quad \exp(2\pi i (m_1 x_1 + \cdots + m_s x_s)) \\ &= \sum c(\underline{m}) \exp(2\pi i (\underline{m}, \underline{x})), \end{aligned}$$

此处 Fourier 系数 $c(\underline{m})$ 适合

$$|c(\underline{m})| \leqslant c \| \underline{m} \|^{-2}, \tag{28}$$

其中 $\| \underline{m} \| = \overline{m_1} \cdots \overline{m_s}$ 及 $\overline{n} = \max(1, |n|)$, 我们记这种函数类为 $E_s(C)$. 由于

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\exp(2\pi i n k/m) = \begin{cases}1, 若\ m \mid n,\\ 0, 其他情形\end{cases}$$

及

$$c(\underline{0}) = \int_{G_s} f(\underline{x}) \mathrm{d}\, \underline{x},$$

所以对于任何整矢量 $\underline{a}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{a}\,k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\underline{m}} c(\underline{m})\exp(2\pi i(\underline{m}, \underline{a})k/n) \\ &= \sum_{\underline{m}} c(\underline{m}) \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(2\pi i(\underline{a}, \underline{m})k/n) \\ &= \sum_{(\underline{a}, \underline{m}) \equiv 0 (\bmod n)} c(\underline{m}) \\ &= c(\underline{0}) + \sum_{(\underline{a}, \underline{m}) \equiv 0 (\bmod n)}{}' c(\underline{m}),\end{aligned}$$

从而由(28)得

$$\sup_{f \in E_s(C)} \left| \int_{G_s} f(\underline{x}) \mathrm{d}\, \underline{x} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{a}\,k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant C\Omega(\underline{a}, n),$$

此处

$$\Omega(\underline{a}, n) = \sum_{(\underline{a}, \underline{m}) \equiv 0 (\bmod n)}{}' \| \underline{m} \|^{-2}, \tag{29}$$

其中 $\sum'$ 表示求和号中去掉 $\underline{m} = \underline{0}$ 一项.

这是对求积公式误差估计的另一种处理, 在此必须注意到任 何非周期函数的积分都可以归结为周期函数的积分.

例 3　命

$$\phi_1(\underline{x}) = \frac{1}{2}(f(\underline{x}) + f(\underline{x}_1(1 - x_1)), \cdots,$$

$$\phi_s(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\phi_{s-1}(\underline{x}) + \phi_{s-1}(\underline{x}_s(1 - x_s)),$$

此处 $\underline{x}_v(x)$ 为将 $\underline{x}$ 的第 v 个分量 x_v 换成 x 后所得的矢量，即 $\underline{x}_v(x) = (x_1, \cdots, x_{v-1}, x, x_{v+1}, \cdots, x_s)$. 显然 $\phi_s(\underline{x})$ 是周期函数，而且

$$\int_{G_s} f(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x} = \int_{G_s} \phi_s(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x}.$$

由引理 2，命

$$\phi(\underline{x}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^s f\left(\left(\sin\frac{\pi x_1}{2}\right)^2, \cdots,\right.$$

$$\left.\left(\sin\frac{\pi x_s}{2}\right)^2\right) \sin\pi x_1 \cdots \sin\pi x_s.$$

则 $\phi(\underline{x})$ 是周期函数，而且

$$\int_{G_s} f(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x} = \int_{G_s} \phi(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x}.$$

定理 7　我们有

$$\Omega(\underline{a}, n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\pi^2}{3}\right)^s + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{v=1}^{s}\left(1 + 2\pi^2 B_2\left(\left\{\frac{ka_v}{n}\right\}\right)\right), \\ \quad \text{当 } 2 \nmid n, \\ \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\pi^2}{3}\right)^s + \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{\pi^2}{6}\right)^\mu\left(1 + \dfrac{\pi^2}{3}\right)^{s-\mu} \\ \quad + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\prod_{v=1}^{s}\left(1 + 2\pi^2 B_2\left(\left\{\frac{ka_v}{n}\right\}\right)\right), \text{当 } 2 \mid n, \end{cases} \tag{30}$$

此处 μ 表 $a_v(1 \leqslant v \leqslant s)$ 中的奇数个数及 $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ 表示 Bernoulli 多项式.

证:由于

$$\Omega(\underline{a}, n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Sigma' \exp(2\pi i(\underline{a}, \underline{m})k/n \| \underline{m} \|^{2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{v=1}^{s}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i a_v m_v k/n)\overline{m_v}^{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{v=1}^{s}\left(1 + 2\pi^2 B_2\left(\left\{\frac{ka_v}{n}\right\}\right)\right) - 1,$$

故得定理.

对于 $\underline{a}, n$,由定理7可得 $\Omega(\underline{a}, n)$, Korobov 建议对于 $n = p$ 时取 $\underline{a} = (1, a, \cdots, a^{s-1})$,然后比较诸 $\Omega(\underline{a}, p)(1 \leqslant a < p)$,使 $\Omega(\underline{a}, p)$ 取最小之矢量 $\underline{a}$,即取作 mod p 之极值系数,因此获得 mod p 之极值系数需要 $O(p^2)$ 次初等运算.丢番图逼近方法只要 $O(\log n)$ 次初等运算即可得 $\underline{a}(n)$,其对应之 $\Omega(\underline{a}, n)$ 需 $O(n)$ 次初等运算来求得.一张含有$(\underline{a}, n)$ 的表已编制好,将有益于实际应用(见华罗庚与王元[6]).

四 其 他 应 用

1. 插值法,对于任何 s 个变数的周期函数 f,我们希望寻找一个三角函数 P_f,使用它来逼近 f 所得的误差主项独立于 s.

假定 $f(\underline{x}) \in E_s(C)$,则 f 有 Fourier 展开

$$f(\underline{x}) = \sum c(\underline{m})\exp(2\pi i(\underline{m}, \underline{x})),$$

此处

$$c(\underline{m}) = \int_{G_s} f(\underline{x})\exp(-2\pi i(\underline{m}, \underline{x}))\mathrm{d}\underline{x}.$$

命

$$P_f(\underline{\underline{x}}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\sum_{\|\underline{\underline{m}}\|<N}\exp\left(2\pi i\left(\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{x}} - \frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\right),$$

则

$$\Delta = \sup_{f\in E_s^{\alpha}(c)} |f(\underline{\underline{x}}) - P_f(\underline{\underline{x}})| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sup_{f\in E_s^{\alpha}(c)} \sum_{\|\underline{\underline{m}}\|<N}\left|(c(\underline{\underline{m}}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\exp\left(2\pi i\left(\underline{\underline{n}}, \underline{\underline{x}} - \frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\right)\right|$$

及

$$\sum\nolimits_2 - \sup_{f\in E_s^{\alpha}(c)} \sum_{\|\underline{\underline{m}}\|\geqslant N} |c(\underline{\underline{m}})|.$$

由于 $\|\underline{\underline{m}}\| = M(M \neq 0)$ 的解数为 $O(M^{\varepsilon})$，所以

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sum_{\|\underline{\underline{m}}\|\geqslant N} C\|\underline{\underline{m}}\|^{-2} = O\left(C\sum_{m=N}^{\infty} m^{-2+\varepsilon}\right)$$
$$= O(CN^{-1+\varepsilon}).$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\exp\left(-2\pi i\left(\underline{\underline{m}}, \frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\underline{\underline{l}}} C(\underline{\underline{l}})\exp(2\pi i(\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{m}}, \underline{\underline{a}})k/n)$$
$$= \sum_{(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{l}} - \underline{\underline{m}})\equiv 0 (\bmod n)} C(\underline{\underline{l}}) = \sum_{(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{r}})\equiv 0(\bmod n)} C(\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{m}}),$$

所以

$$\left|C(\underline{\underline{m}}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\exp\left(-2\pi i\left(\underline{\underline{m}}, \frac{\underline{\underline{a}}k}{n}\right)\right)\right|$$

$$\leqslant C \sum_{(\underline{a},\underline{r})\equiv 0(\bmod n)}' \| \underline{m} + \underline{r} \|^{-2}.$$

由于

$$\| \underline{r} \| \leqslant 2^s \| \underline{m} \| \| \underline{r} + \underline{m} \|,$$

所以

$$\Sigma_1 \leqslant CN^2 \sum_{(\underline{a},\underline{r})\equiv 0(\bmod n)}' \| \underline{r} \|^{-2} = CN^2\Omega(\underline{a}, n),$$

因此

$$\sup_{f\in E_s(C)} | f(\underline{x}) - P_f(\underline{x}) |$$
$$= O(CN^{-1+\varepsilon} + CN^2\Omega(\underline{a}, n)),$$

此处 $\Omega(\underline{a}, n)$ 由(30)给出,即求积公式的误差估计可以用来估计 $\triangle$,我们可以选取 n, $\underline{a}(n)$ 及 $N = N(n)$ 使 $\triangle$ 的主阶独立于 s.

2. 第二类 Fredholm 方程.我们用大写拉丁字母表示 s 维矢量,考虑积分方程

$$\phi(P) = \lambda \int_{G_s} K(p, Q)\phi(Q)dQ + f(P),$$

此处 $f \in E_s(C)$ 及 $K \in E_{2s}(C)$,记 $M_k = \frac{\underline{a}k}{n}$,则得

$$\int_{G_s} K(P, Q)\phi(Q)dQ = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K(P, M_k)\phi(M_k)$$
$$+ O(\Omega(\underline{a}, n)).$$

命 $\widetilde{\phi}(M_k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 表示线性方程组

$$\widetilde{\phi}(M_j) = \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} K(M_j, M_k)\widetilde{\phi}(M_k)$$
$$+ f(M_j), 1 \leqslant j \leqslant n$$

的解,则我们可以证明

$$\phi(P) = f(P) + \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} K(P, M_k)\widetilde{\phi}(M_k)$$

$$+ O(\Omega(\underline{a}, n)),$$

此处与"O"有关的常数仅依赖于 f, K 及 λ.

3. 第二类 Volterra 积分方程. 考虑积分方程

$$\phi(x) = \int_0^x K(x, y)\phi(y)\mathrm{d}y + f(x),$$

此处 $f \in E_1(C)$ 及 $K \in E_2(C)$, 方程的解由 Neumann 级数

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \phi_v(x)$$

给出, 此处

$$\phi_v(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{v-1}} R_v \mathrm{d}x_1 \cdots x_v$$

及

$$R_v = R_v(x, x_1, \cdots, x_v)$$
$$= K(x, x_1)K(x_1, x_2)\cdots K(x_{v-1}, x_v)f(x_v).$$

由于存在一个三角多项式 P_v 使

$$| R_v - P_v | = O(N^{-1+\epsilon} + N^2(\Omega(\underline{a}, n))),$$

所以

$$\left| \phi_v(x) - \int_0^x \cdots \int_0^{x_{v-1}} P_v \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_v \right| \leqslant \int_0^x \cdots$$
$$\int_0^{x_{v-1}} | R_v - P_v | \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{v-1}$$
$$= O(\frac{1}{v!}(N^{-1+\epsilon} + N^2\Omega(\underline{a}, n))).$$

将 Neumann 级数分成两部分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = \sum_{v \leqslant M}^{\infty} \phi_v(x) + \sum_{v > M}^{\infty} \phi_v(x).$$

后面这个级数可以由显然的估计

$$\sum_{v > M}^{\infty} \phi_v(x) - O\left(\sum_{v > M}^{\infty} \frac{1}{v!}\right) = O(M!^{-1})$$

给出, 选取适当的 M 可得

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{M} \int_0^x \cdots \int_0^{x_{v-1}} P_{v-1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_v$$

$$+ O(N^{-1+\varepsilon} + N^2 \Omega(\underline{a}, n)).$$

4. 我们还可以考虑齐次 Fredholm 方程

$$\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \phi(y) \mathrm{d}y,$$

此处 $K(x, y)$ 适合某些条件的最小特征值及其对应的特征函数的渐近解问题.

5. 考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right) u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \; -\infty < x_v < \infty$$

$$(1 \leqslant v \leqslant s)$$

的柯西(Cauchy) 问题,此处初始条件为

$$u(0, \underline{x}) = f(\underline{x}) \in E_s(C).$$

我们可以利用插值法的结果得到

$$u(t, \underline{x}) = \sum_{1 \leq \underline{m} < N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{a} k}{n}\right) \exp(-2\pi i(\underline{a},$$

$$\underline{m}) k/m - 4\pi^2(\underline{m}, \underline{m}) + 2\pi i(\underline{m}, \underline{x}))$$

$$+ O(N^{-1+\varepsilon} + N^2(\Omega(\underline{a}, n)).$$

6. 考虑方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right) u = f,$$

的狄里希勒(Dirichler) 问题,此处 $f \in E_s(C)$,且对于每一个变数都是奇函数及 u 适合边界条件:$u(\underline{x}) = 0(\underline{x} \in G_s)$,则我们可以得到 $u(\underline{x})$ 的一个近似解:

$$u^*(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\underline{a} k}{n}\right) \phi_k(\underline{x}).$$

此处

$$\psi_k(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi^2 n}\sum_{\|m\|<N}{}' \exp(2\pi i(\underline{m}, \underline{x} - \frac{\underline{a}k}{n}))$$

$$(\underline{m}, \underline{m})^{-1}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

$u(\underline{x})$ 与 $u^*(\underline{x})$ 之差之主阶独立于 s(见华罗庚与王元[4,6] 及王元[2,3,4,6]).

五　几个猜想

为了进一步的研究,我们提出如下猜想:

1.存在整数贯$(n_l)(1 < n_1 < n_2 < \cdots)$ 及整矢量 $\underline{a} = \underline{a}(n_l) = (a_1, \cdots, a_s)(l = 1,2\cdots)$ 使

$$W(n_l, \underline{a}) = \sup_{f\in E_s(C)}\left| \int_{G_s} f(\underline{x}) d\underline{x} - \frac{1}{n_l}\sum_{k=1}^{n_l} f\left(\frac{\underline{a}k}{n_l}\right)\right| \leqslant \frac{Cc(s)(\log n_l)^{s-1}}{n_l^2}. \tag{31}$$

华罗庚与王元[1] 及 Bahvalov[1] 对于 $s = 2$,独立地证明了,当 $n_l = F_{l+2}$, $\underline{a} = (1, F_{l+1})(l = 1,2,\cdots)$ 时,(31) 成立. Korobov[1] 证明了对于素数 P,存在矢量 $\underline{a} = \underline{a}(P)$ 使 $W(p, \underline{a}) \leqslant C \cdot c(s)\frac{(\log p)^{2s}}{p^2}$, 这一结果被 Bahvalov[1] 改进为 $W(p, \underline{a}) \leqslant \frac{C \cdot c(s)(\log p)^{2(s-1)}}{p^2}$. Sarygin[1] 证明了对于任何整数 $n \geqslant 2$ 及整矢量 $\underline{a} = \underline{a}(n)$ 皆有估计式 $W(n, \underline{a}) \geqslant Cc(s)\frac{(\log n)^{s-1}}{n^2}$. Bahvalov[1] 还证明了(31) 可以由下面的猜想推出来.

2.存在整数集(n_l) 及整矢量 $\underline{a} = \underline{a}(n_l)(l = 1,2,\cdots)$ 使同余式

$$(\underset{=}{a}, \underset{=}{m}) \equiv o(\text{mod } n_l)$$

的任何非寻常解皆满足

$$\| \underset{=}{m} \| > c(s) n_l.$$

3. 存在整数集 (n_l) 及整矢量 $\underset{=}{a} = \underset{=}{a}(n_l)$ 使集合 $\left(\left\{\frac{a_1 k}{n_l}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{n_l}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant n_l)$ 有偏差

$$D(n_l) \leqslant c(s) \frac{(\log n_l)^{s-1}}{n_l}.$$

对 $s = 2$ 及 $\underset{=}{a} = (1, F_{l+1})$, Zaremba[1] 证明了 $D(F_{l+2}) < cF_{l+2}^{-1} \log F_{l+2}$.

参考文献

N. S. Bahvalov

[1] On approximate evaluation of multiple integrals, Ves. Univ. of Moscow, 1959, 3 ~ 18.

S. Haber

[1] Experiments on optimal coefficients, see "Applications of number theory to numerical analysis," edited by S. Zaremba, Acad. Press, 1972, 11 ~ 18.

E. Hlawka

[1] Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie Gleichverteilung, Ann. di Math. Pure Appl. 4, 1961, 325 ~ 335.

[2] Uniform distribution modulo 1 and numerical integration, Comp. Math. 16, 1964, 95 ~ 105.

华罗庚与王元

[1] 关于多重积分的近似计算的若干注记, 科学记录, 4 : 1, 1960, 6 ~ 8

[2] 丢番图逼近与数值积分(Ⅰ),科学通报,6,1964,518 ~ 520;(Ⅱ)科学通报,6,620 ~ 621

[3] 多维周期函数的数值积分,中国科学技术大学学报,2 · 1,1966,1 ~ 12.

[4] 论一致分布与近似分析——数论方法,(Ⅰ)中国科学,16,1973,339 ~ 357,(Ⅱ)中国科学,17,1974,220 ~ 235.(Ⅲ)中国科学,18,1975,184 ~ 198.

[5] A note on simultaneous diophantine approximations to algebraic integers, Sci. Sin., 5, 20, 1977, 563 ~ 567.

[6] Applications of number theory to numerical analysis, Springer Verlag(Heidelberg)and Science Press(Beijing), 1981.

N. M. Korobov

[1] On approximate evaluation of multiple integrals, Dokl. Akad. Hayk SSSR, 124, 6, 1959, 1207 ~ 1210.

[2] Properties and calculation of optimal coefficients, Dokl. Akad. Hayk SSSR, 132, 1960, 1009 ~ 1012.

[3] Number theoretic method in approximate analysis, Fizmat, Moscow, 1963.

H. Minkowski

[1] Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math., 26, 1902, 333 ~ 351.

H. Niederreiter

[1] Existence of good lattice points in the sense of Hlawka, Monatsh. Math. 86, 1978, 203 ~ 219.

K. F. Roth

[1] On irregularities distribution, Mathematica, 2, 1954, 73 ~ 79.

I. F. Sarygin

[1] A lower estimation for the error of quadrature formulas for certain classes of functions, Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz., 3, 1963, 370 ~ 376.

W. M. Schmidt

[1] Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, Acta Math. 125, 1970, 189 ~ 201.

I. M. Sobol

[1] An exact estimate of the error in multidimensional quadrature formulas for functions of the classes $\widetilde{W}_l$ and $\widetilde{H}_l$, Z. Zycisl. Mat. i. Mat. Fiz., 1, 1961, 208 ~ 216.

王元

[1] A note on interpolation of a certain class of functions. Sci. Sin., 10, 1960, 632 ~ 636.

[2] 论积分的近似计算及其应用(数论方法的应用), 数学进展, 5, 1962, 1 ~ 44.

[3] Remarks on the interpolation of a certain class of functions, Sci. Sin., 14, 1965, 629 ~ 631.

[4] On interpolation of a certain class of functions, Kexue Tongbao, 9, 1966, 387 ~ 389.

[5] On diophantine approximation and approximate analysis I, Acta Math. Sin., 25, 1982, 248 ~ 256; II, Acta Math. Sin., 25, 1982, 323 ~ 332.

[6] A note on the approximate solution of the Cauchy problem by number theoretic nets, Chinese Ann. Math., 3, 1982, 451 ~ 456.

王元, 徐广善与张荣肖

[1] 高维数值积分的数论方法, I, 应用数学学报, 2, 1978, 106 ~ 114; II, 应用数学学报, 5, 1982, 412 ~ 417.

H. Weyl

[1] Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins, Math. Ann., 77, 1916, 313 ~ 352.

S. K. Zaremba

[1] Good lattice points, discrepancy and numerical integration, Ann. Mat. Pure Appl. 73, 1966, 293 ~ 317.

仆人与皇后（谈谈数论的应用）*

数论有什么用处呢？谁也不怀疑，许多数学分支之所以存在，应该归功于“现实世界”提出的问题，例如物理学、工程技术等提出的问题．熟知的例子有微积分，还有天体力学中需要的微分方程理论，以及流体力学中必不可少的偏微分方程，等等．但是，数论怎么样呢？有一点是确凿无疑的，就是费马（P. de Fermat），欧拉（L. Euler），拉格朗日（J. L. Lagrange），勒让达（A. M. Legendre），高斯（G. F. Gauss）等都是出自数论内在的趣味及其特有的美而研究人类知识的这一领域的，他们确实毫不在乎他们那些优美的定理是否会有什么“有用的”应用．

高斯把数论置于科学之巅，他把数论描绘成“一座仓库，贮藏着用之不尽的，能引起人们兴趣的真理”．希尔伯特（D. Hilbert）则把数论看成“一幢出奇地美丽而又和谐的大厦”“它有简单的基本定律，它有直接了当的概念，它有纯正的真理”．闵可夫斯基（H. Minkowski）比喻数论“以柔美的旋律来演奏强有力数论音乐”（以上见 C. Reid, Hibert, Springer－Verlag, 1970）．总之，数论是“纯正洁白”的．高斯有如下名言：

“数学是科学的皇后，数论乃数学之皇后”．

随着数学的深入发展，强有力的数学工具渗透到数论的研究中

* 原载《二十一世纪》（香港），1993年，83～90．

去. 由于数论问题的简单明了, 往往会导致研究深化. 由此产生的概念, 结果与方法对其他数学领域的影响也日见明显. 1900 年, 希尔伯特在第二届国际数学大会的著名报告中, 以"三体问题"与"费马问题"作为例子来说明一个好的问题对于推动数学发展的作用. 三体问题是天文学提出的最基本的自然现象问题. 费马问题为何能跟三体问题相提并论? 所谓费马问题是说, 不定方程

$$x^n + y^n = z^n$$

当 $n \geqslant 3$ 时没有非寻常解. $x = 0$, $y = z$ 或 $y = 0$, $x = z$ 称为寻常解. 这样一个非常特殊, 似乎不重要的问题, 却对数学产生了难以估量的影响. 受这个问题的启发, 库默尔 (E. E. Kummer) 引进了理想数, 并发现分圆域的素理想数因子分解定理. 这个定理又被戴德金 (D. W. R. Dedekind) 与克罗内科 (L. Kronecker) 推广到任意代数数域, 其意义已远远超出数论的范围, 而深入到代数与函数论的领域.

还可以举哥德巴赫 (C. Goldbach) 猜想为例. 所谓哥德巴赫猜想是说, 不定方程

$$2n = p + q$$

有素数解 p, q, 此处 $n \geqslant 2$ 为任意给定整数. 由于研究这一孤立问题, 带动了解析数论一些强有力的方法的产生与发展. 例如哈代 (G. H. Hardy), 李特伍德 (J. E. Littlewood) 与拉马努扬 (S. Ramanujan) 的圆法; 维诺格拉朵夫 (I. M. Vinogradov) 的素变数三角和估计方法; 仆朗 (V. Brun), 赛尔伯格 (A. Selberg), 与陈景润的筛法; 列尼克 (Yu. V. Linnik), 瑞尼 (A. Renyi), 潘承洞与朋比尼 (E. Bombieri) 的大筛法与素数分布论. 这些方法不仅是解析数论的强有力工具, 而且对其他数学领域亦有应用与影响.

因此, 数论不是数学的一个孤立分支, 这一观点已成为共识.

华罗庚在他的《数论导引》（科学出版社，1957）的序言中首先强调了这一论点：

"其一，希望能通过本书具体地说明一下数论和数学中其他部分的关系."“但是在今天的数论入门书中往往不能看出这一关联性，并且有一些‘自给自足’的数论入门书会给读者以不正确的印象：就是数论是数学中的一个孤立的分支."“作者试图在本书中就初等数论的范围尽可能地说明这一点．例如素数定理与富利叶（J. B. J. Fourier）积分的关系．因为受本书性质的限制，我们不能把素数定理和整函数的关系在本书中叙出．本书将说明整数之分拆问题、四平方和问题与模函数论的关系；二次型论、模变换与罗巴切夫斯基（N. I. Lobacevski）几何的关系等."

其次，数论是研究整数规律的数学分支，它的概念与结果构成抽象数学的概念与方法的背景之一，而且也是促进数学发展的内部源泉之一．数论的这个功能也几乎是共识的．在华罗庚的《数论导引》的序言中也有阐述：

“其二，从具体到抽象，是数学发展的一条重要大道，因此具体的例子往往是抽象概念的源泉，而所用的方法也往往是高深数学里所用的方法的依据."“从数学本身来说，它研究的最基本的对象是‘数’与‘形’．因此，‘几何图形’所引出的几何直觉，和由‘数’而引出的具体关系和概念往往是数学中极丰富的源泉."

在文化大革命结束前，国内发展数学的哲学思想是只承认数学发展的外部动力，而不承认其内部动力．这必然导致数学发展上的实用主义倾向，甚至发展到学术上的虚无主义，否定历史上一切数学成果．相当长时间内，数学的正常发展受到严重阻碍．

数论除了上述两个功能外，它有更直接的“应用”吗？

50年代以来，电脑蓬勃发展与应用．电脑渗透到各个科学领域，大大开阔了人们的眼界．人们重新检查过去积累的科技成果，

方法直至观念．数学除用于传统的学科，如物理学、力学、天文学与工程技术之外，在科学计算、生物科学、地学科学、计量经济学、管理科学，乃至社会科学中都有应用．这些科学都需要从定性研究向定量研究深入发展，所以离散数学显得日益重要，它已与连续数学有同等的重要性．在愈来愈多的场合下，人们需要用到数论的概念、结果与方法．事物总是由量变到质变的，数论的应用也由零散的应用达到系统的应用，由应用数论的一般成果到应用最深刻的数论成果，甚至形成专门的数论应用分支．

50年代末兴起的近似分析中的数论方法，是以近似计算多重定积分为研究主题的，积分近似计算是一个古老的研究课题，它与微积分学同时产生．牛顿（I. Newton）本人就是一位数值积分专家，著名的牛顿—柯斯（R. Cotes）公式包有梯形公式（Trapezoid rule）与辛卜生公式（T. Simpson's rule）作为特例．车比雪夫（P. L. Chebycev）、埃尔米特（C. Hermite）与高斯都曾对数值积分问题作过杰出贡献．但他们的贡献都是属于一维数值积分的范畴．若将这些公式推广到高维空间，则误差将随着维数而迅速增加，所以这些方法在高维空间都是无效的．直到50年代末，多维数值积分的论文还是寥若晨星．原因并不是当时的纯粹数学积累不够，不足以研究多维数值积分问题，关键在于计算工具落后，即使研究出新方法，亦是无法进行实际使用，仍然是纸上谈兵，引不起人们的兴趣与注意．由冯·诺依曼（J. Von Neumann）与乌拉姆（S. Ulam）在40年代首创的所谓数值积分的蒙特卡罗（Monte Carlo）方法的要点是将一个分析问题，如数值积分，化为一个有同样解答的概率问题，如某随机函数的数学期望的计算，然后用统计模拟的方法来处理后一问题．这就需要产生服从均匀分布的独立样本，或称随机数．但随机数如何产生？实际上所有产生随机数的方法仍然是"确定性"的，即按一定的数学程序来产生．数值积分

中的数论方法就是给出一组在空间中均匀分布的点列，用它来代替所谓随机数来构造多维求积公式．这组点列称为伪（quasi）随机数，而数论方法也称为伪蒙特卡罗方法．这一方法是成功的，求积公式的误差主阶与维数无关．首先是卡罗波夫（N. M. Korobov）在 1957 年给出了一个公式，他的方法基于完整三角和的估计．50 年代末与 60 年代初，卡罗波夫，华罗庚，那夫卡（E. Hlawka）与哈尔顿（J. H. Halton）等先后发表了他们的方法，这些方法涉及到指数和估计、一致分布论、丢番图逼近论与经典代数数论的应用，甚至用到数论中最深刻的成果之一：吐埃—西革尔—罗斯—斯密特（A. Thue, C. L. Siegel, K. F. Roth, W. M. Schmidt）定理．现在人们正在尝试用数论方法来处理插入公式、积分方程与偏微分方程的近似计算；尝试用于试验设计安排、最优化计算与统计模拟问题等，它已经逐步形成一个在理论上与实际应用上颇有成效的新数学领域．

密码问题已不再像过去那样，仅仅用于军事与外交等少数领域，随着科学技术的不断发展，在更广大的领域，如财务、金融与银行业务往来等方面都要用到密码，因此密码的设计不能像过去那样采取事先约定的密约方式，而需要发码与破译的手续不太复杂．最好是“公开”的，但若对方不掌握“破约”，则无法进行破译．用这种思想设计的密码理论称为“公约密码学”（Public key cryptography），这是 70 年代末才开始的一门学问，至今才十来年历史．

公约密码设计依靠一个“活板门函数”（Trapdoor function）．什么是活板门函数呢？它是这样一个函数，在一个方向很容易计算，但在反方向，则极难计算．例如，用电脑很快可以将两个 1000 位的数乘起来．相反地，如果已知一个 2000 位的数是两个约 1000 位的素数之积，欲求出这两个素数来，除某些简单情形外，即使用最先进的电脑与程序，在今天仍然是遥遥不可及的事．用这

一思想构造出一种公约密码，称之为 RSA（L. M. Adleman, R. L. Rivest, A. Shamir）. 命 $n=pq$，其中 p，q 为素数，则

$$\varphi(n)=(p-1)(q-1)$$

称为欧拉函数．欧拉定理是说：任给正整数 a，满足（a，n）=1，即最大公约为 1，则

$$a^{\phi(n)}\equiv 1(\bmod n),$$

意为 $a^{\phi(n)}-1$ 是 n 的倍数．当 n 的分解式知道后，求 $\phi(n)$ 很容易，反之，若不知 n 的分解式，则"求不出" $\phi(n)$．如果公开 n 及一个满足 $(\varphi(n),s)=1$ 的整数 s，我们可以将一个信息用数字 M 来表示，例如将英文字母 $a,\cdots,z$ 分别表示用 $0,\cdots,25$ 来表示，则 YES $=24\times 26^2+4\times 26+18=16346$，在这里 16346 表示 YES．当 n 为两个大素数之积，则 $(n,M)=1$ 恒成立．将 $M^s\equiv C(\bmod n)$ 发给对方．若对方知道 $\phi(n)$，则可求得 t 使

$$st\equiv 1(\bmod \phi(n)),$$

于是求 C 的 t 次方幂，即得

$$C^t\equiv M^{st}\equiv M(\bmod n),$$

这就得到了欲求的信息 M．因此关键是对方需得知 ϕ（n）之值，这就需要知道 n 的因子分解，但就目前的数论积累与电脑技术，当 n 稍大时还远远做不到．

另外一个活板门函数是"离散对数"，也可以用它来设计公约密码．上面这些方法的破译都归结为如何快速有效地将正整数分解成素因子之积，这个数论最古老、最基本的课题又热起来了，在这一课题的最新研究中，甚至用到椭圆曲线(Elliptic curves)的高深理论．

数论应用在近三十年来的发展，已改变了传统对数论的看法，也改变了 50 年代对数论功能的认识．1990 年，革莱姆（R. Grabam）在科罗拉多（波尔多）大学一次公开演讲中宣称：

“现在，数论是最有用的数学分支.”

这一断言说明，数论是科学与数学最忠实而有用的仆人．数论由皇后变成仆人或变成既是仆人又是皇后，标志着科学技术发展的一个里程碑！我们应该为之热情欢呼！

均匀设计

——一种试验设计方法*

在科学实验与工农业生产中，经常要做实验. 如何安排实验，使实验次数尽量少，而又能达到好的试验效果呢？这是经常会碰到的问题. 解决这个问题有一门专门的学问，叫做"试验设计". 试验设计得好，会事半功倍，反之就要事倍功半了.

例如假定某化学产品的质量依赖于三个因素，即温度（A），反应时间（B）与苏打浓度（C）. 这三个因素各取值如下：

温度（A）　　80℃，85℃，90℃，

时间（B）　　90m，120m，150m，

苏打浓度（C）　5%，6%，7%.

我们将各因素的不同值分别记为 A_1，A_2，A_3，…，C_2，C_3，其中 A_1，A_2，A_3 称为因素 A 的水平，其他依次类推.

试验设计的目的在于研究各因素间的影响及找出最佳的水平组合. 一个好的试验设计既要能尽量减少试验次数，又要能获得最多的信息量，我们先介绍一下传统的方法：

1. 考虑各因素水平间的所有组合，以上面的例子来说，水平间的所有组合数为 $3\times3\times3=27$. 所有这 27 个试验都做之后，当然可以找到最佳组合. 但若试验太昂贵或试验周期太长，则会由于

---

* 原载《科技导报》，5，1994，20～22.

所需试验次数太多而无法进行．若在这个例子中每个因素的水平个数为 10，则试验次数就是 $10^3=1000$，太多了．

2．单因素试验．只对一个因素进行实验，而将其他因素都固定．采用这个方法必需假定各因素间没有交互作用．60 年代开始，华罗庚在我国倡导与普及的“优选法”，即国外的斐波那契法或黄金分割法，就是单因素的最佳调试法．在实际问题中，各有关因素均相互独立的情况是极少的，所以在使用优选法时需首先抓住“主要矛盾”，即根据经验突出一个最主要的因素进行试验，而将其他因素都固定住．因此优选法还不是一个很精确的近似方法．

表 1 $L_9\ (3^4)$

试验号 \ 因素	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

3．正交设计．这是统计学中历史悠久且普遍使用的多因素试验设计方法，其理论基础是正交拉丁方理论与群论．如果有 s 个因素，每个因素的水平数为 q，则正交设计的试验次数的数量级为 q^2，记为 $O\ (q^2)$．这当然比因素的所有水平组合 q^s 低多了．正交设计的另一优点为可以按照表格来安排试验，使用很方便．我们用

Ln (q^t) 来表示一张正交表，其中 L 表示正交设计，n 表示试验次数，q 表示每个因素的水平个数及 t 表示独立因素的最大个数．以我们的例子来说，我们可以用正交表 L_9 (3^4) 来安排实验，共做 9 次试验即可．我们用表 1 的前 3 列，它们分别表示因素 A，B，C，各列中的 1，2，3 分别表示各因素的各水平，于是得表 2．

表 2　　正交设计

试验号＼水平	A	B	C
1	80℃	90m	5%
2	80℃	120m	6%
3	80℃	150m	7%
4	85℃	90m	6%
5	85℃	120m	7%
6	85℃	150m	5%
7	90℃	90m	7%
8	90℃	120m	5%
9	90℃	150m	6%

我们就可以按照表 2 来做 9 次实验了．由表 1（或表 2）立即看出：每个因素的每个水平均重复 3 次，这称为均衡性；任何两个因素的所有水平组合出现的次数均相同，这称为正规性．正交设计的优点为：

（1）有一套表格，便于多因素试验的设计与数据分析．

（2）由于有正交性，易于分析出每个因素的主效应，特别当每个因素均有二水平时，还可以分析出因素间的交互效应．

（3）若将试验区域映为超单位立方体，将试验点对应于等距有理格子点，则正交设计的试验点在试验区域中散布均匀且整齐可

比．但对于某些工业试验与昂贵的科学实验来说，正交设计的试验次数仍嫌太多，而难于安排，这就需要我们寻求新的试验设计方法．均匀设计就是这样一种方法，其试验次数比正交设计的试验次数有明显的减少．

均匀设计属于近三十年来发展起来的伪蒙特卡罗方法的范畴．将经典的确定的单变量问题的计算方法推广后用于多变量问题的计算时，计算量往往跟变量个数有关．即使电脑再进步很多，这种方法仍无法实际应用．乌拉姆（S. Vlam）与冯·诺依曼（J. von Neumann）在 40 年代提出蒙特卡罗方法，即统计模拟方法，这个方法的大意是将一个分析问题化为一个有同样解答的概率问题，然后用统计模拟的方法来处理后面这个问题．这样使一些困难的分析问题反而得到了解决，例如多重定积分的近似计算．蒙特卡罗方法的关键是找一组随机数作为统计模拟之用，所以这一方法的精度在于随机数的均匀性与独立性．

50 年代末，有些数学家试图用确定性方法寻找空间中均匀散布的点集来代替蒙特卡罗方法中的随机数．已经找到的点集都是用数论方法找到的．按照外尔（H. Weyl）定义的测度来度量，它们的均匀性很好，但独立性差些．用这些点集来代替蒙特卡罗方法中的随机数，往往会得到更精确的结果．这一方法称为伪蒙特卡罗方法或数论方法．数学家首先将这一方法成功地用于多重积分近似计算．

数论方法得到的点集称为伪随机数．从统计学的观点看，伪随机数就是一个均匀分布的样本．我们注意到虽然正交设计的试验点在试验区域内散布得相当均匀，但还不是非常均匀．我们可以用数论方法找到一些散布得更均匀的点集．利用这些点集来安排实验，试验结果应该既有代表性，又能减少试验次数．可以证明，在具有同样均匀性的前提下，正交设计与均匀设计所需的试验次数的量级

分别是

$$O(q^2)\text{与 }O(q\log q),$$

显然后者比前者大为减小了．对于固定的 q，我们也可以具体算出均匀设计比正交设计所需的试验次数减少了很多，在此就不详述了．

均匀设计也像正交设计一样，有一系列表格，对于实际使用者来说，跟使用正交设计一样，只要查表就可以了．我们用 $U_n\ (q^t)$ 表示均匀设计表，其中 U 表示均匀设计，n 表示试验次数，q 表示每个因素的水平个数及 t 表示最大的独立因素个数．

表 3 $U_7\ (7^3)$

试验号 \ 因素	A	B	C
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	2
4	4	1	5
5	5	3	1
6	6	5	4
7	7	7	7

例（来自药学工业）在阿魏酸的合成工艺中，考察

A（原料配比）：1.0，1.4，1.8，2.2，2.6，3.0，3.4

B（吡啶量）： 10，13，16，19，22，25，28

C（反应时间）：0.5，1.0，1.5，2.0，2.5，3.0，3.5

这是一个 3 因素，各有 7 个水平的试验，我们可以采用均匀设计表 $U_7\ (7^3)$ 来做．表 3 中各列中的数字分别表示该因素的水平数．于是由表 3 即得试验方案．

若考虑因素的所有水平组合，则共需做 $7^3=343$ 次实验．若用正交设计，则需做 $7^2=49$ 次实验．均匀设计只要做 7 次实验即可．

关于数据处理问题．若用正交设计，除非每个因素只有两个水平，一般很难用方差分析方法分析出交互作用．若用回归分析来处理数据，则可以表格化进行．对于均匀设计，用回归分析处理数据的计算量比正交设计大些．但若有一台微机及相应的软件，则数据分析仍然是易于进行的．

表 4　均匀设计

试验号 \ 因素	A	B	C
1	1.0	13	1.5
2	1.4	19	3.0
3	1.8	25	1.0
4	2.2	10	2.5
5	2.6	16	0.5
6	3.0	22	2.0
7	3.4	28	3.5

均匀设计也可以处理各因素有不同的水平数的实验安排问题，我们也有均匀设计表，可以按照表格来安排实验．

均匀设计还可以处理某些带约束条件的试验设计问题，例如混料试验设计问题，即假定有 t 个因素 A_i（$1\leqslant i\leqslant t$），每个因素有 q 个水平

$$(A_i)\quad a_{ij}\ (1\leqslant j\leqslant q),$$

要求每个实验

$$(a_{1j_1},\ \cdots,\ a_{tj_t})$$

满足

$$a_{1j_u} + \cdots + a_{tj_t} = 1.$$

这相当于在单纯形

$$T = \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_t);\ x_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant t),\ x_1 + \cdots + x_t = 1\}$$

上找一个均匀散布的集合. 我们也有混料均匀设计表格可供使用.

均匀设计产生于70年代末. 由于某军工实验要求有一个试验少的试验方案, 而正交设计所需的试验次数太多, 这就导致了方开泰与我的合作. 我们用数论方法来研究这个问题, 我们借鉴了"近似分析中的数论方法"这一领域中的成果. 该领域在国际上是50年代末开始研究的. 我国在华罗庚的领导下, 也在50年代末就开始了这方面的研究, 所以起步较早, 对这一领域的情况熟悉. 因此, 若无基础理论研究的积累与素养, 作出均匀设计这样的工作是不可能的. 另一方面, 熟悉实际工作的数学家方开泰能提出问题当然是产生均匀设计的前提. 这也提供了这样一个例子, 即问题来源于实际, 由于有基础理论的积累与研究而导致了问题的解决. 我们认为, 作为长远起作用的基础理论研究, 即使从应用与开发的角度上讲, 也是不容忽视的.

均匀设计只是数论方法的一个应用, 数论方法还有广泛应用的园地. 例如多重插值公式的建立, 某些积分方程与微分方程的近似求解, 求函数的整体极值, 求某些多元分布的近似代表点, 及用于统计推断的一些问题, 如多元正态性检验及多元球性检验

近十五年来, 均匀设计已在我国的军工试验、纺织工业、制药工业、化学工业等方面有了不少应用, 取得了一些经济效益与社会效益, 在国外亦受到重视. 当然, 任何一个应用数学方法也不是万能的, 不会没有缺点的, 均匀设计也是一样, 还需要在实际应用中加以鉴定与完善.

本文曾在1994年2月中国科学技术协会全委会上报告过. 作

者衷心感谢科协领导给他报告这项工作的机会.

(参考资料：[1] 华罗庚与王元，数论在近似分析中的应用，科学出版社，1978，英文版，Springer – Verlag 1981. [2] 方开泰与王元，Number – zheoretic mest o. ds in Statistics，Chapman and Hall，1993，中文版：科学出版社，1996)

均匀设计与均匀设计表*

在科学实验与工农业生产中，经常要做实验．如何安排实验，使实验次数尽量少，而又能达到好的试验效果呢？这是经常会碰到的问题．解决这个问题有一门专门的学问，叫做“试验设计”．试验设计得好，会事半功倍，反之就要事倍功半了．60年代中，华罗庚教授在我国倡导与普及的“优选法”，即国外的斐波那契方法，与我国的数理统计学者在工业部门中普及的“正交设计”法都是试验设计法．这些方法经普及后，已为广大技术人员与科学工作者掌握，取得了一系列成就，产生了巨大的社会效益与经济效益．随着科学技术工作的深入发展，上述两种方法就显得不够了．“优选法”是单变量的最优调试法，即假定我们处理的实际问题中只有一个因素起作用，这种情况几乎是没有的．所以在使用时，只能抓“主要矛盾”，即突出一个因素，而将其他因素固定，这样来安排实验．因此“优选法”还不是一个很精确的近似方法．“正交设计”的基础是拉丁方理论与群论，可以用来安排多因素的试验，而且试验次数比各因素的各水平的所有组合数来说，是大大地减少了．但对于某些工业试验与昂贵的科学实验来说，试验仍嫌太多，而无法安排．

---

* 这是为方开泰著《均匀设计与均匀设计表》一书写的前言，该书已由科学出版社于1994年出版．

1978年，七机部由于导弹设计的要求，提出了一个五因素的试验，希望每个因素的水平数要多于10，而试验总数又不超过50．显然优选法与正交设计都不能用．方开泰教授在几年前，曾为近似计算一个多重积分问题找过我，我向他介绍了多重数值积分的数论方法并取得了好结果，这就使他想到是否可能用数论方法于试验设计的问题．于是我们经过几个月的共同研究，提出了一个新的试验设计，即所谓“均匀设计”，将这一方法用于导弹设计问题，取得了成效．我们的文章在80年初发表后，十五年来，均匀设计已在我国有较广泛的普及与使用，取得了一系列可喜的成绩．

均匀设计属于近三十年来发展起来的“伪蒙特卡罗方法”的范畴．将经典的确定的单变量问题的计算方法推广后用于多变量问题的计算时，计算量往往跟变量个数有关．即使电脑再进步很多，这种方法仍无法实际应用．乌拉姆（S. Vlam）与冯·诺依曼（J. von Neumann）在40年代提出蒙特卡罗方法，即统计模拟方法，这个方法的大意是将一个分析问题化为一个有同样解答的概率问题，然后用统计模拟的方法来处理后面这个问题．这样使一些困难的分析问题反而得到了解决，例如多重定积分的近似计算．蒙特卡罗方法的关键是找一组随机数作为统计模拟之用，所以这一方法的精度在于随机数的均匀性与独立性．

50年代末，有些数学家试图用确定性方法寻找空间中均匀散布的点集来代替蒙特卡罗方法中的随机数．已经找到的点集都是用数论方法找到的．按照外尔（H. Wegl）定义的测度来度量，它们的均匀性很好，但独立性差些．用这些点集来代替蒙特卡罗方法中的随机数，往往会得到更精确的结果，这一方法称为伪蒙特卡罗方法或数论方法．数学家首先将这一方法成功地用于多重积分近似计算．从统计学的观点看，伪随机数就是一个均匀分布的样本．数值积分需要大样本，均匀设计则要找一些小样本．由于这个样本比正

交设计所对应的样本要均匀，所以用它来安排实验会得到好的效果．当然在寻求小样本时，寻求大样本的方法是起了借鉴作用的．

均匀设计只是数论方法的一个应用．数论方法还有广泛应用的园地．例如多重插值公式的建立，某些积分方程与微分方程的近似求解，求函数的整体极值，求某些多元分布的近似代表点，及用于统计推断的一些问题，如多元正态性检验及多元球性检验．

早在50年代末，外国刚开始研究伪蒙特罗方法时，华罗庚教授就倡议并领导了这一方法在我国的研究．他的开拓性成果总结在我们的专著《数论在近似分析中的应用》（科学出版社，1978，英文版：Springer－Verlag and Science press，1981）中，这些工作是方开泰教授与我合作的工作重要的背景与参考材料之一．

我与方开泰教授合作了近二十年．由于他既是一个数学家，又有长期在中国各工业部门普及应用数理统计的宝贵经验，所以他有很好的应用数学背景与洞察力．他能及时地提出有价值的研究问题及解决问题的可能途径．我们的合作既是愉快的，又是富于成效的．我们的成果总结在我们的专著“Number－theoretic Methods in Statistics”（Chapman and Hall，1993，中文版由科学出版社于1996年出版）之中．

方开泰教授的这本书着重于应用与普及，但也包括了他的最新成果．书后的均匀设计表就是最近他用准确的偏差估计方法算出来的，比过去的结果有较大的改进．我相信他的书的出版，对于在我国进一步普及与应用均匀设计将是很重要的，我愿借此机会预祝本书成功．

综合论述



有限与无穷　离散与连续
(与华罗庚合作)*

一

这是我们教低年级数学基础课的一些体会，似乎是看出了些问题，但由于作者的水平限制，对数学的了解是片面的，并且更没有哲学修养能从若干感性知识中概括出理性论断来，所以写这样一篇提供素材的文章，希望聚沙成塔，集腋成裘，以备沙里淘金者参考.

数学中有两大类的问题：一类是离散性质的，一类是连续性质的. 在我们一生学习的过程中，开始于数数 —— 一、二、三、四、五、…… 这完全是离散性质的东西. 算术、代数都是处理离散性质问题的学科. 整个中学阶段所学的数学可以说都不是突出利用“连续性”与“无穷性”的学科. 直线上的点显示出连续性质，但突出地重用“连续”与“无穷”却始于微积分. 在描绘一瞬间的速度，或一瞬间的量的变化，我们重用了“连续性”. 这就是初等数学与高等数学的分界. 但如果从“初等”“高等”这些字样，或我们学习的次序，就断定“连续性的数学”比“离散性的数学”更优越了或更能解决问题了，那就不尽

---

* 感谢中国科学院裴丽生副院长的鼓励. 他建议我们把教学体会不要仅仅写在数学著作〔1〕或教材〔2〕中，要把一些与其它兄弟学科可能有关的东西写出来互相交流，因此才写了这样一篇内容芜杂的文章，敬求兄弟学科及本学科同志们的指教.

原载《科学通报》，12，1964，4 ～ 21.

然了.本文的目的在于着重地谈谈离散性的重要.但必须指出,我们不是说连续性次重要些,而是说必须两者妥善结合,一切从实际出发,看需要而决定,不能强调一面而忽略一面.但有一点似乎可以向初学者建议,在学连续性数学之前,应先打好所对应的离散性数学的基础.因为绝大部分连续性的结果往往是以离散性的结果做背景的,或者是离散性问题的极限.但这并不是说,我们不应当把学习的时间或精力在连续性数学上多化一些.

先看看客观事实,如果本来就是离散的,那就不必人为地引进连续性(但并不排斥,虽然离散,但多到无法处理的时候,也势所必致地用连续方法来处理的可能性,如沙的流动).在资本主义国家里有些经济学者,用微分方程来处理经济学上的问题.我们对经济学一窍不通,不能有所批判,但有一点可以肯定,他们所根据的数据是离散——或者实质上不可能连续化的.如:农业生产量不能分为每瞬间几何,它是季度性生产,连分月份都不可能,枉论其他.用连续方法来处理离散问题,对头否?但他们有这样的答辩:用上了微分方程就有定性理论,利用它易于看出发展趋势.岂其然哉!实质上,利用差分方程或矩阵乘方的性质照样可以看到趋势,并且还容易些,还浅显些.只是在大学课程中没有包括进去而已,或原则上有之,但未像微分方程那样多方强调而已.在(三)中还将指出连续化的不可能性,硬用较深的数学殊无谓也.深入浅出是功夫,浅入深出是浪费.

我们有这样的不成熟的看法,先学些矩阵知识,差分方程,再学微分方程,则既可以学得处理"离散"问题的方法,取其极限,往往又可以得出微分方程的结果.

以上所讲就是说:离散问题用离散方法来处理为妥的论点.现在进一步说明:连续问题中的离散处理方法.

首先的问题是数据取得的问题.能不能取得无穷精密的数据?不能,即使准到十位百位,用十位百位小数表达出来的数据所成的集体

仍然是离散的，而不是连续的(并且有时过分的精密度是完全不必要的).再则取数据的次数也必然是有限的，离散的.

其次看计算工具.近代的数字电子计算机本质上是离散的，它的特点是根据有限位数据进行有限次运算，算出有限个有限位的解答来.一切有限，仍然是离散的.

最后所能拿出来的结果(或客观的要求也是如此)当然也是离散的.这是一个从离散到离散的过程.数学家们通常的想法是从离散数据用插入法或回归法得函数，得微分方程，微分方程直接解不出来，再将微分方程差分化变为代数方程(离散)，然后得出离散性的解答来.其过程中，经过插入法有误差，经过差分法又有误差，变成代数问题以后的求解误差就不提了，因而提出了以下的课题：能不能从离散直接到离散.这样避免了经过函数逼近的误差，避免了经过微分方程差分求解的误差.如果可能，则方法初等化了！而结果反而可能更精密了！我们水平限制不敢多所论列，但主观上谬认为这是一个值得尝试的方向.再声明一下，重视离散性方法的同时，我们决不能忽视连续性方法.解析数论就是一门用连续性方法处理离散问题而获得重要成果的分支.连续性的考虑往往会看到一些离散性所不易看到的问题.

以下罗列一些例子，这些例子是从教基础课得来的.选择的标准当然也就是基础课或略高一些的水平，并且都是选取了与其他学科的科学工作者有共同兴趣的问题.各节之间的关系也是不太大的.例如，常用富利哀级数的同志不妨看看第四节.

再重复一句，这是抛砖引玉性质的文章，多举出些具体的感性材料，有可能为将来的教学改革或理论认识创造条件.虚心求教，敬请指正.

二　对象是连续的，但我们只能了解到其有限个数据 —— 算体积，算面积

在学了微积分之后，我们常常有这样的喜悦：任何曲线的长度，任何曲面的面积及任何物体的体积都可以用积分方法来处理了. 这种喜悦是应当有的，也是可以理解的. 但是以为这就已经可以解决问题了，那就错了. 深入一想，我们所学过的方法都有一个共同的要求，就是要求有表示曲线、曲面的公式. 但在实际中，有没有这样的表达公式?例如说，在估计矿藏储量时，有没有一个表示这矿体周界的解析公式. 又如在估计山坡面积时，有没有一个 $z = f(x, y)$ 表示这个曲面的公式?在实际情况中是没有的. 一来由于我们不可能对每一点都进行实测，二来由于即使对矿体测了很多点，但也是不能够求出曲面的表达式来的，即使拼拼凑凑找出个公式，但在求积分的时候，依然是积不出来(找原函数) 的时候多，而能够积成初等函数的时候少 —— 少得很. 因而矿体和山坡虽然是连续分布的，但是我们还是必须用离散的方法才能(近似) 估出体积及面积.

但这并不是说微积分求面积体积的公式没有用了，这里是说，必须看看怎样才能用得上，并且将发现，理论是有用的，它能给我们提供具体的线索，并帮我们判断各种方法的优劣性及进一步改善这些方法.

还是举一个例子吧：在估计山坡面积时，有两套方法：一套是地理学上的方法，称为 Волков 法，另一套是矿藏几何学上的方法，称为 Бауман 法. 以下我们把它们介绍一下，再比优劣.

假定地图上以 Δh 为高程差画出等高线，并假定有一制高点及等高线成圈(其他情况很容易由此被推导出来). 假定由制高点(l_n)向外一圈一圈地画等高线$(l_{n-1}), (l_{n-2}), \cdots, (l_0)$. 取$(l_0)$ 的高度为 0，(l_n) 的高度为 h. (l_i) 与(l_{i+1}) 之间的面积用 B_i 表示(即投影的面

积).

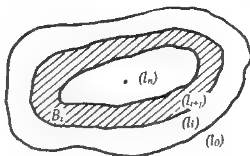


图 1

1. Бауман 方法.

a) $C_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\triangle h$(中间直立隔板的面积)*;

b) $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的近似值.

2. Волков 方法.

a) $l = \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ 为等高线的总长度, $B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$ 为总投影面积, 由

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\triangle h \cdot l}{B}$$

得出平均倾角 α;

b) $B\sec\alpha = \sqrt{B^2 + (\triangle h \cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的近似值.

这两个方法哪一个更好一些?这些方法所给出的结果在怎样的程度上迫近斜面积?又当等高线的分布趋向无限精密时,这些方法所给出的结果是什么?是否就是真的面积?下面我们将回答这些问题.

以制高点为中心引进极坐标. 命高度是 z 的等高线方程是

$$\rho = \rho(z, \theta), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

---

* 等高线(l_i)的长度用 l_i 表示.

(假定 $\rho(z,\theta)$ 适当地光滑). 命 $z_i = \frac{h}{n}i$, $\triangle h = \frac{h}{n}$, 则 (l_i) 所围绕的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(l_i) 的长度等于

$$l_i = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta.$$

于是由中值公式得

$$B_i = -\int_0^{2\pi}\rho(z'_i,\theta)\frac{\partial\rho(z'_i,\theta)}{\partial z'_j}\mathrm{d}\theta\triangle h$$

及

$$C_i = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z''_i,\theta)+\left(\frac{2\rho(z''_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta\triangle h,$$

其中 $z_i \leqslant z'_i, z''_i \leqslant z_{i+1}$. 因此当 $\triangle h \to 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}\theta\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta\right)^2}\mathrm{d}z.$$

这便是当 $\triangle h \to 0$ 时, 用 Бауман 方法算出的斜面积所趋近的值. 而 $\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1}B_i\right)^2+\left(\triangle h\sum_{i=0}^{n-1}l_i\right)^2}$ 的极限

$$\text{Бо} = \sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}z\right)^2+\left(\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta\right)^2}$$

便是 Волков 方法算出的斜面积所趋近的值.

习知曲面的面积 S 为

$$S = \int_0^h\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

引入一个复值函数

$$f(z,\theta)=-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2},$$

则

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\mathrm{d}\theta\right|\mathrm{d}z,$$

$$\text{Bo}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right|.$$

由此可见：

$$\text{Bo}\leqslant\text{Ба}\leqslant S.$$

结论：(i)Бауман 方法比 Волков 方法精密些，(ii) 所求出的结果比真正的结果常常偏低一些.

除此而外，不难讨论 Bo = S 及 Ба = S 的情况. 我们还可以给出由这些方法所产生的误差的估计，并指出产生误差的原因及避免误差的方法. 关于这些请参看[1]，[2].

附记 1. 本节所用的积分是可以避免的.

三　无法连续化 —— 非负方阵

如产量，如能量，如概率都不能是负数. 在宇宙线的簇射过程中，在运筹学及概率论的若干问题中，往往出现非负元素的方阵，即某些物态的多寡经过某段时间之后的变化情况可以用非负方阵表达之. 更具体些说，例如有甲乙丙三种物件各有 a,b,c 单位. 但是经过一段时间 t 之后，甲类物质变为 ap_{11},ap_{12},ap_{13} 单位的甲乙丙三类物质，而乙类物质变为 $b\,p_{21},bp_{22},bp_{23}$ 单位的甲乙丙三类物质，丙类物质变为 cp_{31},cp_{32},cp_{33} 单位的甲乙丙三类物质. 即经过时间 t 后，甲乙丙物质的数量各为

$$ap_{11}+bp_{21}+cp_{31}$$

$$ap_{12} + bp_{22} + cp_{32}$$

$$ap_{13} + bp_{23} + cp_{33}$$

个单位.由于物质不能变负,所以 $p_{ij} \geqslant 0$.这个方阵

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

称为变化方阵.如果原始物质的数量用矢量 $v = (a, b, c)$ 表之,则经过时间 t 后,其数量将为

$$vP.$$

如果仍然照这样的关系变化,则经过 $2t$ 时间将得

$$vP^2.$$

经过 nt 时间则为

$$vP^n.$$

当 n 增加时,我们可以看出发展趋势.

为了易于了解起见,我们回到单一的情况.设原来的数量是 c,经过单位时间后变为 cq,经过 n 个单位时间得 cq^n,经过半个单位时间可以设想,它的数量是 $cq^{1/2}$(注意问题就在这里了!),一般地讲,可以设想在时间 t 的时候,它的数量是 $f(t) = cq^t$,它的微分表达式是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = (\log q)f, f(0) = c.$$

也就是说 $f(t) = cq^t$ 是微分方程唯一的解.

对于单一的现象,这个方法虽有在理论上不妥当的地方,即在时间 1/2 是否是 $q^{1/2}$ 倍.但是在应用的时候并不出现困难,其主要原因是一个正数可以任意开方,也就是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{q^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \log q$$

是实的存在的.这个规律可以描述为量的增加率与时间成比例.因此

可能事实上虽然 $q^{1/2}$ 不定义,但我们理想地设想它存在,并不会发生什么矛盾.

如果有人希望把这一规律推广到多个现象的时候,那就势必要求方阵 P 的平方根,求方阵 P 的任意方根.是否有非负方阵的平方等于 P?如果没有,则用微分处理是不可能的.举个例子:没有非负方阵的平方等于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其理由是极简单的,如果

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $a^2 + bc = 0$,由 a, b, c 的非负性质得 $a = 0$ 及 b 或 $c = 0$.这是不可能的.换言之,如果方阵 P 不是"无穷可分的",也就是没有实方阵 Q 使 $P = e^Q$,则不可能用微分方法来处理.在研究线性弹性系统微振动的颤动性质的时候,所对应的方阵的特征根全是正的,而且是不同的,因而 Q 是存在的.但在经济现象中,有波浪式前进,螺旋式上升的现象,这说明它所对应的方阵不可能全部是正根,而可能有负根或复根存在,如果出现负根即就无法保证"无穷可分"性.因而用微分方程的理论来笼统地处理经济现象是欲巧反拙的.

在物理现象及概率现象中,当运用微分方程来处理这种现象的时候,既要考虑能不能,又要考虑要不要,如果并不能证明"无穷可分"时,用差分方程保险些.在证明了"无穷可分"时,也可能用差分方程更简单些.不一定要用微分方程.

这里再说些题外之言,完成演变所需要的时间是否有"单位"存在?即短于这个时间,不能完成某种演变.在这样的情况下,"差分"法比"微分"法更能表达客观现象.在这种现象中,时间变为"离散".但基本单位是多长?如果多种不同单位现象的混合,情况又如何?在

数学上反映出来更有可度约与不可度约的情况. 因而类似数论中 Diophantine 逼近的现象出现了, 但确是更复杂的问题.

附记 1. 关于非负方阵的一些性质.

定理 1 如果

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant q, a_{ij} \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

则方阵 $A = (a_{ij})$ 的特征根的绝对值都 $\leqslant q$.

这个定理的证明是很简单的. 由特征根 λ 的定义, 有非全为零的 $x_1, \cdots, x_n$ 使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

因此

$$|\lambda| |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j|,$$

所以

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) |x_j| \leqslant q \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

即得所证.

这一性质在以后要用, 所以给予证明. 实质上, 非负方阵的若干性质与特征, 似乎都有它的经济学(或其他用得到它的学科) 上的重要意义. 例如, 非负方阵有一个最大正特征根, 这似乎可以用来作为一个经济体系的发展速度的标志, 而对应于这个特征根有一非负元素的特征矢量, 这个特征矢量似乎反应了各种产品之间, 或产品与劳动之间的正确等价关系, 如果有复虚数的特征根存在, 则反映了可能若干部门间会出现螺旋式上升, 波浪式前进的情况.

不仅如此, 还可以提供"应当改进哪些系数(如每吨钢的煤耗系数) 可能使我们的经济系统增长最快" 的线索, 因而决定应当改进的关键性的环节. 当然这样的建议只能作为参考, 而更重要的是人的作

用.在这里所讲的只不过是在政治挂帅的条件下,这些研究才可能有作为参考的价值.

四　多算了反而吃亏 —— 实用调和分析

在广泛的应用中,我们经常要把一个函数 $f(x)$ 展开成为 Fourier 级数,即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{1}$$

这里

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx \mathrm{d}x, \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2}$$

有时用等价的复数形式的 Fourier 级数

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}, \\ C_m &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 是由实验得来的,有时仅测得有限个数据,根据这有限个数据,怎样求出渐近的 Fourier 级数来呢?有时 $f(x)$ 即使有解析表达式,但积分(2),(3) 的原函数无法获得,因而必须进行数值积分.对于这两种情况,一般都用以下的方法来处理.

假定在$[0,2\pi]$中给了 $n(=2n'+1)$ 个点的函数值

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), 0 \leqslant l \leqslant n-1,$$

而用

$$a_m \sim a'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi lm}{n},$$

及

$$b_m \sim b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n}$$

来近似计算 a_m 与 b_m. 也许会出现这样的错觉, 少取几个数据, 利用现代计算工具多算几项 a'_m, b'_m, 则

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \tag{4}$$

会更精确地逼近于 $f(x)$. 这是不对的, 如果仅给了 n 个数据, 即用 n 个点的函数值来近似计算 a_m 与 b_m, 过多的计算不但不能增加精确度, 反而会增大误差, 甚至于变成荒谬的结论. 其理由是 $a'_m = a'_{n+m}, b'_m = b'_{n+m}(m = 1,2,\cdots)$, 所以级数

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \tag{5}$$

是发散的. 因而一直算下去, 所得出的结果将大大偏离于原来所给的函数 $f(x)$(特别当 $f(x)$ 是有一定光滑的函数, 例如连续, 可微商等). 我们可以证明最好是算到 n 项, 多算则浪费精力, 造成更大的误差, 少算则没有充分利用数据.

用初等指数和的方法来处理这一问题, 方法是离散性的, 并且亦易于计算. 先从复数形式的 Fourier 级数讲起: 假定在区间 $[-\pi, \pi]$ 中给了函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), l = 0, \pm 1, \cdots, \pm n'. \tag{6}$$

利用公式

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i l m/n} = \begin{cases}0, 若\ n \nmid m, \\ 1, 若\ n \mid m.\end{cases} \tag{7}$$

可以从

$$y_l = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi i l m/n}, \ |l| \leqslant n' \tag{8}$$

定出 C'_m 来. 定 C'_m 的方法是: 以 $e^{-2\pi i l q/n}$ 乘(8) 式, 并对 l 求和, 由

(7) 得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{2\pi ilq/n} = \sum_{m=-n'}^{n} C'_m \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i(m-q)l/n} = nC'_q. \tag{9}$$

因此建议我们用

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx},$$

$$C'_m = \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} \tag{10}$$

来逼近 $f(x)$. 我们现在来估计 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的误差.

定理 1　假定 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$中有 $r(\geqslant 2)$ 阶连续微商,而且是以 2π 为周期的函数,并且假定

$$|f^{(r)}(x)| < C,$$

则

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)\,n'^{r-1}}. \tag{11}$$

证:已知

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx},$$

$$C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\mathrm{d}x. \tag{12}$$

分部积分 r 次得

$$C_m = \frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x) e^{-imx}\mathrm{d}x.$$

立刻推得

$$|C_m| \leqslant \frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\left|f(x) - \sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}\right| \leqslant 2\sum_{m=n'+1}^{\infty} \frac{C}{|m|^r}$$

$$\leqslant 2C\int_{n}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{r}}=\frac{2C}{(r-1)\,n'^{r-1}}.\tag{13}$$

当 $|m|\leqslant n'$ 时,

$$\begin{aligned}C_m-C'_m&=C_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_le^{-2\pi ilm/n}\\&=C_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}e^{-2\pi ilm/n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}C_qe^{2\pi iql/n}\\&=C_m-\frac{1}{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}C_q\sum_{l=-n'}^{n'}e^{2\pi i(q-m)l/n}\\&=C_m-\sum_{\substack{q=-\infty\\q\equiv m(\mathrm{mod}\,n)}}^{\infty}C_q,\end{aligned}$$

因此

$$|C_m-C'_m|\leqslant\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'\,|C_{m+nt}|,$$

这里 $\sum'$ 表示和号中除去 $t=0$ 一项.因此

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{m=-n'}^{n'}(C_m-C'_m)e^{imx}\Big|&\leqslant\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'\,|C_{m+nt}|\\&\leqslant\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C}{|m+nt|^{r}}\leqslant 2C\sum_{l=n'+1}^{\infty}\frac{1}{l^{r}}\\&\leqslant\frac{2C}{(r-1)\,n'^{r-1}}\end{aligned}\tag{14}$$

(任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m$($|m|\leqslant n'$)的形式,但 $t\neq 0$,这表达除去 $|l|\leqslant n'$ 以外的所有整数,故得所云).

因此由(12),(13),(14)得

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(r-1)\,n'^{r-1}}.$$

在实际计算的时候,$S_n(x)$ 还可以表达得更简单些.

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_me^{imx}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} e^{imx}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l \sum_{m=-n'}^{n'} e^{i(x-2\pi l/n)m}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(n' + \frac{1}{2}\right)(x - 2\pi l/n)}{\sin\frac{1}{2}(x - 2\pi l/n)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx - \pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}(x - 2\pi l/n)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}nx}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} \frac{(-1)^l y_l}{\sin\frac{1}{2}(x - 2\pi l/n)}. \tag{15}$$

附记 1.　如果分点

$$0 \leqslant x_1 < \cdots < x_n < 2\pi$$

不是均匀的，则可以由联立方程

$$\begin{cases} \dfrac{a'_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n'}(a'_m\cos mx_i + b'_m\sin mx_i) = y_i\ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \dfrac{a'_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n'}(a'_m\cos mx + b'_m\sin mx) = y(x) \end{cases}$$

消去 a'_0, a'_m, b'_m 而得出 y 与 $y_1, \cdots, y_n$ 的关系.

五　差分方法——连续与离散间一座常用的桥梁

在微分方程的求解中，我们常用差分方法，这是一个应用十分广泛的方法. 简言之，这一方法是将微分方程的求解问题化为代数方程(即所谓差分方程)的求解问题. 为了简单起见，作为例子，我们现在扼要地介绍一下用这一方法来处理 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的过程. 在求解差分方程时，我们将要谈到代数方法与 Monte Carlo

方法，并作一些分析比较.

问题：命 G 是一个有光滑周界的有界的平面单联通区域. 在它的边界 Γ 上给了一个连续函数 $f(x,y)$，求连续函数 $u(x,y)$ 适合于

(i) 在 G 内满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

(ii) 在 Γ 上取已给函数 f 的值.

关于 u 的近似求法的步骤如下：

Ⅰ. 网格化. 在平面上作与坐标轴平行的两族曲线

$$x=mh,\ y=nh,$$

这里 h 是某一正数，而 m,n 过所有的整数值. 这样的区域 G 当然为一些以 h 为边长的正方形所覆盖. 正方形的顶点称为整点. 与 G 有公共点的正方形所成的区域以 G^* 表之. G^* 是一多边形. 命 Q 是 G^* 的边界上的整点，假定 Γ 与 Q 的最近点是 P（如果有许多点有相同的距离，则可取其中的任意一点），我们定义 $f(Q)=f(P)$. 这样在 G^* 的边界 Γ^* 的整点上都有了函数值 $f(Q)$.

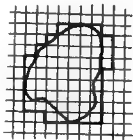


图 2

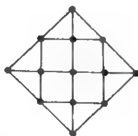


图 3

Ⅱ. 差分化.用

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$$

及

$$\frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$$

各代替二阶偏微商$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,则 Laplace 方程可以改写为

$$u(x,y)=\frac{1}{4}[u(x+h,y)+u(x-h,y)+ \\ +u(x,y+h)+u(x,y-h)]. \quad (2)$$

也就是在非边界整点(x,y),函数$u(x,y)$的数值等于其东、南、西、北四邻近整点的函数值的平均.

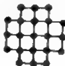
Ⅲ. 问题一变而为已知多边形边界整点的函数值而求内部整点的函数值的问题了, 即问题化为求解线性方程组(2).

但是由此得到的是否会是矛盾方程组?是否仅有唯一的解?都是必须解答的问题.我们现在先举一个简单的例子,然后就直觉地看出一般的理论了.

不妨取 $h=1$, 给了八点的函数值$u(2,0)$, $u(1,1)$, $u(0,2)$, $u(-1,1)$, $u(-2,0)$, $u(-1,-1)$, $u(0,-2)$, $u(1,-1)$, 求$u(0,0)$, $u(1,0)$, $u(0,1)$, $u(-1,0)$, $u(0,-1)$五值*.

将方程式全部列出:

---

* 不难看出,对于这个例子,图 3 与  图形是等价的.

$$\left.\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{1}{4}(u(1,0)+u(0,1)\\
&\qquad +u(-1,0)+u(0,-1))\\
u(1,0) &= \frac{1}{4}(u(2,0)+u(1,1)\\
&\qquad +u(0,0)+u(1,-1))\\
u(0,1) &= \frac{1}{4}(u(1,1)+u(0,2)\\
&\qquad +u(-1,1)+u(0,0))\\
u(-1,0) &= \frac{1}{4}(u(0,0)+u(-1,1)\\
&\qquad +u(-2,0)+u(-1,-1))\\
u(0,-1) &= \frac{1}{4}(u(1,-1)+u(0,0)\\
&\qquad +u(-1,-1)+u(0,-2)).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由消去法得出

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{1}{12}(u(2,0)+u(0,2)\\
&\quad +u(-2,0)+u(0,-2))\\
&\quad +\frac{1}{6}((u(1,1)+u(-1,1)\\
&\quad +u(-1,-1)+u(1,-1)),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
u(1,0) &= \frac{13}{48}u(2,0)+\frac{7}{24}(u(1,1)+u(1,-1))\\
&\quad +\frac{1}{24}(u(-1,1)+u(-1,-1))\\
&\quad +\frac{1}{48}(u(0,2)+u(-2,0)\\
&\quad +u(0,-2))
\end{aligned} \tag{5}$$

等等.

这些系数$\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{13}{48},\cdots$的意义是什么？我们以后再交代. 先作以下的代数处理，把这十三个点的函数值作为一个列矢量的元素，则(3)式可以写成

$$
\begin{bmatrix} u(0,0)\\ u(1,0)\\ u(0,1)\\ u(-1,0)\\ u(0,-1)\\ u(1,1)\\ u(-1,1)\\ u(-1,-1)\\ u(1,-1)\\ u(2,0)\\ u(0,2)\\ u(-2,0)\\ u(0,-2) \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccccc:cccccccc}
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} u(0,0)\\ u(1,0)\\ u(0,1)\\ u(-1,0)\\ u(0,-1)\\ u(1,1)\\ u(-1,1)\\ u(-1,-1)\\ u(1,-1)\\ u(2,0)\\ u(0,2)\\ u(-2,0)\\ u(0,-2) \end{bmatrix}
\tag{6}
$$

可以抽象得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

这里 v 是边界整点的函数值所成的列矢量，而 u 是“内部整点”的函数值所成的列矢量．这种表达法对一般的问题都对．它实质上表达了两件事：①内部整点的函数值可以表为其东、南、西、北四邻近整点的函数值的平均．②边界点仍然是边界点．

因为一个整点只能是不超过四个整点的邻近点，所以方阵 P 的每列元素之和皆$\leqslant 1$．现在来证明 P^2 的每列元素之和皆<1．若不然，由于 P 的元素只能取 0 与 1/4 二值，故 P 必包有子方阵

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

但是因为不能有两个不同的整点具有同样的东、南、西、北四邻近整点，所以这是不可能的．因此 P^2 的每列元素之和皆<1．因此由（三）可知 P^2 的特征根的绝对值皆<1，从而

$$\lim_{n\to\infty} P^n = 0.$$

而且

$$Q + PQ + P^2Q + \cdots$$

收敛（收敛于 $(I-P)^{-1}Q$）．将（7）式连续迭代 n 次得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P^nQ & PQ + P^2Q + \cdots + P^{n-1}Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

命 $n\to\infty$，则得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q+PQ+P^2Q+\cdots \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned} u &= (Q+PQ+P^2Q+\cdots)v = \\ &= (I+P+P^2+\cdots)Qv. \end{aligned} \tag{8}$$

这就是问题的解答，也就是当给了边界整点的函数值 v，可以由(8)算出内部整点的函数值 u 来，这建议了以下的算法：

(A) 代数法．把 u 写成列矢量 $(u_1, \cdots, u_l)'$，v 写成 $(v_1, \cdots, v_k)'$，如果内部整点* u_i 与边界整点 v_j 相邻，则在 Q 的 (i, j) 位置记上 1/4，否则记上 0．如果内部整点 u_i 与 u_j 相邻，则在 P 的 (i, j) 位置记上 1/4，否则记上 0．这样得出 P 与 Q，用以下的格式算出(8)来．

	Qv	
P	PQv	$R_1=Qv+PQv$
P^2	P^2R_1	$R_2=R_1+P^2R_1$
P^4	P^4R_2	$R_3=R_2+P^4R_2$
P^8	P^8R_3	$R^4=R_3+P^8R_3$
…	…	…

用到我们的例子上，由于

$$P^3=\frac{1}{4}P,$$

所以

* 内部整点与边界整点亦分别记之为 $u_1, \cdots, u_l$ 与 $v_1, \cdots, v_k$，请勿混淆．

$$
\begin{aligned}
& Q+PQ+P^2Q+\cdots \\
=& \left(I+(P+P^2)\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)\right)Q \\
=& \left(I+\frac{4}{3}(P+P^2)\right)Q \\
=& \begin{bmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\
\frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\
\frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\
\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} \\
\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

必须指出,这里所介绍的计算程序比解方程组的普通程序更快速些.

现在再来看看(4),(5)中系数的几何意义,看一下(4)式中的$\frac{1}{6}$及$\frac{1}{12}$可能会想到:由(0,0)出发到(0,2)有一条直路,到(1,1)有两条路“⌈”与“⌋”,一共有12条路,因而到(0,2)的可能性是$\frac{1}{12}$,而到(1,1)的可能性是$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$等等.

这种讲法是有道理的,但不易推广.请看下面的说法:从(0,0)到其东、南、西、北各邻近点的可能性各占$\frac{1}{4}$,但这四点均非边界整点,因而由(0,0)一步到达边界的可能性是零.

任何一内点到其四邻点的可能性都是$\frac{1}{4}$,因此从(0,0)走两步,共16种可能性.其中到一顶点的各有一种(共四种),到一边点的各有二种(共八种),进一步退一步仍在原点的四种.因此任意走两步达

到每一顶点的可能性是$\frac{1}{16}$，达到每一边点的可能性是$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$，仍回原地的可能是$\frac{1}{4}$.

走三步不可能由(0,0)到达边界点.

再看走四步的情况，走两步已达边界的情况不谈了.后二步依然从(0,0)出发，但现在到边界点的可能性要乘上$\frac{1}{4}$了，即由(0,0)走四步达到每一顶点的可能性是$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}$，达到每一边点的可能性是$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$，而返回原地的可能性是$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$.

五步不能，而六步的可能性各为

$$\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{16},\quad\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{8},\quad\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}$$

等等.由(0,0)出发走奇数步达到边界点的可能性是没有的.走$2l$步达到每一顶点的可能是

$$\frac{1}{4^{l-1}}\cdot\frac{1}{16}.$$

达到每一边点的可能性是

$$\frac{1}{4^{l-1}}\cdot\frac{1}{8}.$$

而返回原地的可能性是

$$\frac{1}{4^l}.$$

因此，达到每一顶点的可能性是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{16}\cdots\\&=\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

而达到每一边点的可能性是

$$\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{1}{6}.$$

返回原地的可能性是

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{4^l}=0.$$

这就是概率论中的随机游动.

再看(5)式中$\frac{13}{48}$的意义:由(1,0)一步可能到达(2,0),可能性是$\frac{1}{4}$.由(1,0)走一步不到边界点只可能到(0,0),可能性是$\frac{1}{4}$,以后的情况与从(0,0)出发相同.因此走一步以上达到(2,0)的可能性是$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}$.总的可能性是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{13}{48}.$$

同样到(1,1)(或(1,−1))的可能性是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{24}.$$

到其他的边界点必经(0,0),因此就是(0,0)到达这些点的可能性乘以$\frac{1}{4}$,即得

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{48}\quad 与\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}.$$



图 4



图 5

从这一简单的例子,不难直觉地看出一般的理论.这也建议我们用概率方法来解决"Laplace 方程的边界值问题".实质上,解决"差分

化后的代数方程组".

(B)Monte Carlo 法(或概率法).我们先一般地定义二维随机游动如下:设有一质点从 G^* 的某一整点出发,以等概率 1/4 向其东、南、西、北四相邻整点移动一步,然后再以同样的方式,从新的位置向其相邻的四整点处移动一步,如此继续下去,直到达到某一边界整点,游动便告终止.设随机游动的一条路线是

$$\gamma_A: A\to A_1\to\cdots\to A_{l-1}\to Q\in\Gamma^*,$$

则定义随机变量的值为

$$\xi=\xi(\gamma_A)=f(Q).$$

此处 $f(Q)$ 为边界整点 Q 的函数值,若 Q 为边界整点,则定义

$$\xi=\xi(\gamma_Q)=f(Q).$$

随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 即方程组(2)的解.换言之,

$$E(\xi(\gamma_A))=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}E(\xi(\gamma_{A_{1i}})),\quad \text{若 } A\in G^*, \tag{9}$$

及

$$E(\xi(\gamma_Q))=f(Q),\ \text{若 } B\in\Gamma^*, \tag{10}$$

此处 A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} 分别为 A 的东、南、西、北四邻点.

命 $P(\gamma_A)$ 表示循路线 γ_A 游动的概率.

则

$$P(\gamma_A)=\frac{1}{4^l}.$$

因此

$$E(\xi(\gamma_A))=\sum_{\gamma_A}\xi(\gamma_A)P(\gamma_A),$$

此处右端为对一切从 A 出发的游动路线求和.由 A 出发,第一步必然是走到其东、南、西、北四邻点,A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} 中的一个,然后再继续游动.因此

$$E(\xi(\gamma_A))=\sum_{i=1}^{4}\sum_{\gamma_{A_{1i}}}\xi(\gamma_{A_{1i}})P(A\to A_{1i})P(\gamma_{A_{1i}}).$$

由于 $P(A\to A_{1i})=\frac{1}{4}$，所以

$$E(\xi(\gamma_A))=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{\gamma_{A_{1i}}}\xi(\gamma_{A_{1i}})P(\gamma_{A_{1i}})$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}E(\xi(\gamma_{A_{1i}})).$$

此即(9)式. 其次当 $Q\in\Gamma^*$ 时，只有一条游动路线，即停止不动. 因此

$$E(\xi(\gamma_Q))=\sum_{\gamma_Q}\xi(\gamma_Q)P(\gamma_Q)=\xi(\gamma_Q)=f(Q).$$

故得(10)式.

设对 ξ 进行了 N 次观察得到

$$\xi_1,\cdots,\xi_N.$$

则根据大数定律可知，对于任意 $\varepsilon>0$ 皆有

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\left|E(\xi)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right|\leqslant\varepsilon\right)=1.$$

因此当 N 充分大时

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

就可以作为 $E(\xi)$(即解答)的近似值.

随机游动一般是用物理方法或者用数学方法产生的随机数来实现的. 在此不详谈了. 这里说一个通俗的办法：用粉笔将 G^* 画在围棋盘上. 如果要求某点的函数值，可以先在此做一记号，再放上一个棋子，用标有东、南、西、北的正四面体骰子（见图 5）投掷，如果落地的一面是东（或南，西，北），则向东（或南，西，北）走一步，再掷再走，一直到达边界为止. 这样便得到一条随机游动，边界点的函数值即游动的随机变量的值 ξ. 进行充分多次的游动（设为 N 次），记下 ξ 对这 N 次游动的值

$\xi_1, \cdots, \xi_N$.

其算术平均就是所欲求点的函数值的近似值.

结论　差分方法的误差由三部分构成：①网格化时，移动边界值所产生的误差. ②差分化时，把微商换成差分的误差. ③解差分方程时，代数法产生的是普通的误差，而 Monte Carlo 法产生的是概率的误差.

因此，Monte Carlo 法的误差比代数法的误差更大些，亦更不可靠些. 但另一方面，Monte Carlo 方法的计算程序特别简单，而且如果我们只需要求得某些整点的函数值，而不是全部整点的函数值，用这一方法就更加经济了.

六　解析表达式——有时会引入迷途

有些解析公式看来不错，似乎是很解决问题的，甚至于彻底解决问题的. 但如果不加思索地加以运用却会被引入迷途. 如果较全面地理解"连续"与"离散"间的关系，这些失误是完全可以避免的！并且与此相反，反而有相辅相成之妙，也就是解析表达式可以启示新计算方法的苗头，而不仅仅是理论上的重要性而已. 我们仍旧以 Laplace 方程的 Dirichlet 问题为例子，并且取区域为单位圆. Laplace 方程的极坐标形式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{1}$$

问题：求连续函数 u $(\rho,\ \theta)$，它在单位圆内适合 (1)，而在圆周 Γ 上与已给的连续函数相符合，即

$$u(\rho,\theta)|_\Gamma=\varphi(\theta). \tag{2}$$

今后常假定 $\varphi(\theta)$为$[0,2\pi]$中有 $r(\geqslant 2)$阶连续微商，而且是以 2π 为周期的函数，并且假定$|\varphi^{(r)}(\theta)|<C$. 将 $\varphi(\theta)$展开成 Fourier 级数

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta), \tag{3}$$

此处

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

容易看出

$$\rho^m\cos m\theta,\ \rho^m\sin m\theta\ (m=0,1,2,\cdots) \tag{5}$$

都是(1)的解，而且分别以 $\cos m\theta$ 与 $\sin m\theta$ 为边界值. 因此可以希望

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta)\rho^m \tag{6}$$

为(1)适合(2)及(3)的解. 由于

$$a_m=O\left(\frac{1}{m^r}\right),\ b_m=O\left(\frac{1}{m^r}\right),$$

所以易见(6)的确是(1)适合(2)及(3)的解.

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\cos m\theta&=R\left(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\right)-\frac{1}{2}\\&=\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)},\end{aligned}$$

所以由(4),(6)得

$$\begin{aligned}&u(\rho,\theta)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(\cos m\theta\cos m\psi+\sin m\theta\sin m\psi)\rho^m\right]\mathrm{d}\psi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\cos m(\theta-\psi)\right]\mathrm{d}\psi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi.\end{aligned} \tag{7}$$

这称为 Poisson 公式.

这是解答 $u(\rho,\theta)$的解析公式.这个公式的确很不错,似乎都把问题彻底解决了.但是仔细想一下,是否真的解决问题了呢?如果 $\varphi(\psi)$给了之后,能够算出积分(7)(即找到原函数),则问题的确圆满解决了.但如果算不出积分(7)(这种情形比能算出的情形多得多),或者当边界值仅仅由实验给出了若干数据时,就产生了如何近似求解 $u(\rho,\theta)$的问题了.很自然地会想到用数值积分的方法来近似计算(7).我们将在下面指出这样做会导出很荒谬的结论来.

(i) 矩形公式建议我们用

$$T_n(\rho,\theta)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+\rho^2}\tag{8}$$

来逼近 $u(\rho,\theta)$.现在来看看当 $\rho\to 1-0$ 时的情况:

$$\lim_{\rho\to 1-0}T_n(\rho,\theta)=$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 }\theta\neq\frac{2\pi l}{n}\text{或}\theta=\frac{2\pi l}{n}\\ \quad\text{而 }\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)=0(0\leqslant l<n),\\ \infty,\text{当 }\theta=\frac{2\pi l}{n},\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\neq 0(0\leqslant l<n).\end{cases}\tag{9}$$

因此用 $T_n(\rho,\theta)$来逼近 $u(\rho,\theta)$是十分荒谬的.

(ii) 我们在 Poisson 积分中,用阶梯函数

$$\varphi^*(\theta)=\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right),$$

其中

$$\frac{2\pi l}{n}\leqslant\theta<\frac{2\pi(l+1)}{n}(0\leqslant l<n),\tag{10}$$

来代替 $\varphi(\theta)$.换言之,用

$$R_n(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\psi)(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\psi-\theta)+\rho^2}\mathrm{d}\psi\tag{11}$$

来逼近 $u(\rho,\theta)$. 由于

$$\log(1-\rho e^{i\theta})=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho e^{i\theta})^m}{m},$$

取虚部即得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\frac{\sin m\theta}{m}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&R_n(\rho,\theta)\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{2\pi}\int_{\frac{2\pi l}{n}}^{\frac{2\pi(l+1)}{n}}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\\
&\quad\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sin m\left(\frac{2\pi(l+1)}{n}-\theta\right)\right.\\
&\quad\left.-\sin m\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)\right\}\frac{\rho^m}{m}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\varphi\left(\frac{2\pi(l+1)}{n}\right)\right.\\
&\quad\left.-\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)\mathrm{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)}{1-\rho\cos\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)}.
\end{aligned}\tag{12}$$

取 $\theta=C(1-\rho)^a\left(a>\frac{1}{2}\right)$, 则

$$\lim_{\rho\to1-0}\mathrm{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}=\lim_{\rho\to1-0}\mathrm{tg}^{-1}C(1-\rho)^{a-1}.$$

换言之, 当 $\rho\to1-0$, $\theta\to0$ 时, $\mathrm{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}$ 可以趋近于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 中的任意值. 因此若 $\theta_0=\frac{2\pi l}{n}$, 而且 $\varphi\left(\frac{2\pi(l-1)}{n}\right)\neq\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(0\leqslant l<n)$, 则当 $\rho\to1-0$, $\theta\to\theta_0$ 时, $R_n(\rho,\theta)$ 的极限是不

存在的.所以必须给趋限的方法以限制.例如规定趋限是延着向径的方向等.而且可以证明,虽然如此,用 $R_n(\rho,\theta)$来逼近 $u(\rho,\theta)$,精密度仍然是不高的.在此就不作详细讨论了.

以上这两个从解析公式出发的近似计算方法都没有下面这个初等方法更为精密些.

设给了 $n(=2n'+1)$个点的函数值

$$y_l=\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(|l|\leqslant n').$$

则如(四)所示,命

$$S_n(\theta)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{im\theta},$$

$$C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}{}^{*}. \tag{13}$$

如果 $\varphi(\theta)$在$[-\pi,\pi]$中有 $r(\geqslant 2)$阶连续微商,而且是周期为 2π 的函数,并且有$|\varphi^{(r)}(\theta)|<C$,则

$$|\varphi(\theta)-S_n(\theta)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

命

$$S_n(\rho,\theta)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{im\theta}\rho^{|m|}, \tag{15}$$

则

$$u(\rho,\theta)-S_n(\rho,\theta)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\varphi(\psi)-S_n(\psi))(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi.$$

---

* 为简单起见,我们用复形式的 Fourier 级数.复形式与实形式的 Fourier 级数的关系为

$$C_m=\frac{1}{2}(a_m-ib_m),$$

$$C_{-m}=\frac{1}{2}(a_m+ib_m)(m=1,2,\cdots).$$

所以

$$
\begin{aligned}
&|u(\rho,\theta)-S_n(\rho,\theta)| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\varphi(\psi)-S_n(\psi)|(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi \\
&< \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi \\
&= \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

在实际计算时，因为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=-l}^{l} e^{imx}\rho^{|m|} = \sum_{m=0}^{l}(e^{ix}\rho)^m + \sum_{m=0}^{l}(e^{-ix}\rho)^m - 1 \\
&= \frac{1-e^{i(l+1)x}\rho^{l+1}}{1-\rho e^{ix}} + \frac{1-e^{-i(l+1)x}\rho^{l+1}}{1-\rho e^{-ix}} - 1 \\
&= \frac{2-2\rho^{l+1}\cos(l+1)x-2\rho\cos x+2\rho^{l+2}\cos lx}{1-2\rho\cos x+\rho^2} - 1 \\
&= \frac{1-\rho^2-2\rho^{l+1}\cos(l+1)x+2\rho^{l+2}\cos lx}{1-2\rho\cos x+\rho^2},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&S_n(\rho,\theta) = \sum_{m=-n'}^{n'}\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} e^{im\theta}\rho^{|m|} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l \sum_{m=-n'}^{n'} e^{i\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)m}\rho^{|m|} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+2\rho^{n'+2}\cos n'\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)}{1-2\rho\cos\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+\rho^2}. \tag{17}
$$

总之，我们得到

定理 1 命 $u(\rho,\theta)$ 为方程(1)满足(2)的解，此处 $\varphi(\theta)$ 为有 r

($\geqslant 2$) 阶连续微商，而且是有周期 2π 的函数，并且假定 $|\varphi^{(r)}(\theta)| \leqslant C$，则

$$\left| u(\rho,\theta) - \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right) \frac{1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right) + 2\rho^{n'+2}\cos n'\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)}{1-2\rho\cos\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+\rho^2} \right|$$

$$< \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{18}$$

七　一致分布——数论方法与 Monte Carlo 方法

要计算函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分，我们可以把 $[0,1]$ 分成 n 等份，取分点的函数值的算术平均，用来作为 $f(x)$ 的积分的近似值（矩形公式），这就是化连续为离散的方法．实际上，不仅等分点有这样的性质，凡是适合所谓"一致分布"条件的点列都有这个性质．粗略地说，一致分布的意义是说点列落在 $[0,1]$ 中任何一点附近的可能性都是相等的．严格地，可以定义如下：

命 $x_i\ (i=1,2,\cdots)$ 是 $[0,1]$ 间的一个点列，a 为适合 $0\leqslant a\leqslant 1$ 的任意实数，n 个点 $x_1,\cdots,x_n$ 落在分区间 $[0,a]$ 中的个数用 $N_n(a)$ 表它．如果常有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(a)}{n} = a, \tag{1}$$

则称点列 $x_i\ (i=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 中一致分布．

关于一致分布有如下的判别条件．

定理 1　点列

$$x_1,\cdots,x_m,\cdots,0\leqslant x_m\leqslant 1 \tag{2}$$

是一致分布的必要且充分的条件是对任一在 $[0,1]$ 上可 Riemann 求

积的函数 $f(x)$ 常有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证：先证明，如果 $\{x_i\}$ 是一致分布，则(3)式成立.

1)取 $f(x)$ 是如下的函数：

$$f(x)=\begin{cases}C, 若\ 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, 不然.\end{cases}$$

如此则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}=C\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(a)}{n}=Ca=$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

所以，对于这样的函数 $f(x)$，定理真实.

2) 如果 (3) 式对于 f_1, …, f_s 成立，则对 $c_1f_1+\cdots+c_sf_s$ 也成立，因此 (3) 式对所有的阶梯函数也真实.

3) 如果 f 是一 Riemann 可积函数，则任给 $\varepsilon>0$，皆有二阶梯函数 $\varphi_\varepsilon(x)$ 及 $\Phi_\varepsilon(x)$ 使

$$\varphi_\varepsilon(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi_\varepsilon(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

且使

$$\int_0^1(\Phi_\varepsilon(x)-\varphi_\varepsilon(x))\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{5}$$

由 2) 已知本定理对 $\Phi_\varepsilon(x)$ 及 $\varphi_\varepsilon(x)$ 真实，所以

$$\int_0^1\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\varphi_\varepsilon(x_1)+\cdots+\varphi_\varepsilon(x_n)]$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\Phi_\varepsilon(x_1)+\cdots+\Phi_\varepsilon(x_n)]$$

$$=\int_0^1\Phi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x.$$

故得

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

这证明了定理的必要部分.

定理的充分部分的证明极为容易，仅取

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & 不然.\end{cases}$$

(3) 式就变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(a)}{n}=a.$$

定理证完.

显然，一致分布的定义与它的判别条件可以很容易地推广至多个变数（高维单位立方体）的情况．由定理1可见，数值积分方法实依赖于一致分布点列的选取．怎样选取最好的一致分布点列就是数值积分的中心问题．对于计算［0，1］中的积分，用等分点是能够导出最精密的误差的（指误差的阶）．但在多变数的情况，如果用等分点来进行计算，误差依赖于积分的重数．详细言之，固定分点的个数，则当积分的重数增加时，误差亦随之而迅速增加．或者可以说，当要求有一定的精密度时，则必须分点的数目随着积分重数的增加而迅速增加．因此用这一方法来处理高维空间的数值积分，计算量十分巨大，而难于实现．具体地说，对于 s 重积分，欲误差的精密度达到 $O(1/n)$，则分点的个数需要 $O(n^s)$.

近年来发展起来的 Monte Carlo 方法，是常用的高维空间的数值积分方法．即随机地取 n 个点 $(x_1^{(k)},\ \cdots,\ x_s^{(k)})$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，然后以这 n 个点的函数值的算术平均来逼近积分．所谓“随机”的意思是指取每一点的概率都是相等的．这样，当 n 充分大时，就可能达到一定的精密度．随机取点的方法一般都是在计算机上用数学方法来实现的，而这些数学方法多为数论方法，特别是同余式的方法．Monte Carlo 方法的优点在于在机器上运算的手续

简便，收敛速度虽然比矩形公式快些，但是由这一方法得到的只能是概率的误差而不是真正的误差.

所谓数论方法，即按照事先选定的最佳分布的点列上的函数值所构成的单和来逼近多重积分，因而得到的误差不再是概率的，而是肯定的. 不仅如此，这些肯定的误差竟比概率误差还要好些. 而且可以证明，对于某些函数类来说，这种逼近的误差的主阶已经臻于至善了. 具体地说，误差的主阶与单重积分是一样的.

例 假定 $f(x_1, \cdots, x_5)$ 为各变数皆有二阶连续微商的函数，且各阶微商皆为各变数有周期 1 的函数，且

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_5^{i_5}}\right| < C\,(2\pi)^r\ (i_1+\cdots+i_5=r,\ 0\leqslant r\leqslant 10,\ 2\geqslant i_j\geqslant 0),$$

则

$$\Big|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_5)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_5 - \frac{1}{15019}\sum_{k=1}^{15019} f\left(\frac{k}{15019}, \frac{10641k}{15019}, \frac{2640k}{15019}, \frac{6710k}{15019}, \frac{781k}{15019}\right)\Big| < 0.0032\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^5 C.$$

必须指出，数论方法不仅在数值积分方面有用，而且可以用于函数逼近论及积分方程的渐近求解等方面. 例如，我们可以证明，适合某些光滑条件的各变数皆有周期为 1 的函数，都可以用一个三角多项式来逼近，而逼近的主阶不依赖于函数的变数的个数. 关于这些方面，请参看 [1].

参考文献

[1] 华罗庚，王元，数值积分及其应用，科学出版社，1963.
[2] 华罗庚，高等数学引论，科学出版社，1963.

纯粹数学与应用数学*

在讨论纯粹数学与应用数学之前，我们先谈谈数学科学及它在近代科学技术中的位置，数学问题的来源及它的价值观点等问题.

一　数学科学

钱学森在论及现代科学结构的时候，将它分成自然科学、社会科学与数学科学，后来又加上系统科学、思维科学与人体科学等(见［1］，178，296 页). 前三者是基本的. 自然科学看客观世界的角度，也就是恩格斯在自然辩证法中所阐述的看法：研究物质在时空中的运动，物质运动的不同层次，不同层次物质运动的相互关系. 简言之，自然科学是从物质运动这个着眼点去研究整个客观世界. 社会科学研究人类社会的发展运动，社会的内部运动，也研究客观世界对人类社会发展运动的影响. 简言之，社会科学是从人类社会发展运动的着眼点来研究整个客观世界的(见［1］，297～299 页).

数学科学是什么？无论那一门科学技术，都离不开数学科学的一门或几门学科，所以数学科学是研究整个客观世界，这一点是容易理解的. 但数学科学是从什么着眼点来研究整个客观世界的呢？恩格斯说："纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系."

---

* 1996 年 7 月 2 日在上海大学的报告，载于《自然》杂志，19:2，1997，63～65.

(见［2］77页). 胡世华说："数学科学是从质和量对立统一，质和量互变的着眼点去研究整个客观世界的."（见［3］）总之，数学科学应该是独立于自然科学与社会科学的另一门科学.

中国科学院曾提出自然科学的"基础学科"是"数，理，化，天，地，生"六门. 但钱学森认为"一门是物理，研究物质运动基本规律的学问. 一门是数学，指导我们推理和演算的学问. 其他学问都是从这两门派生出来的.""比如化学，它实际上是研究分子变化的物理"."天文学已经不是光看看月亮、太阳、星星在天上的位置和它们的运行规律了，而是要研究星星内部到底是怎样变化的"，"要研究的是宇宙的演化"，这只能靠物理. 地学就是研究地球，现代的板块理论与弄清地球深处的情况都要靠物理."生物学到分子水平，生物学也就归结到物理学上去了". 总之，"天，地，生，化这四门科学，从现代科学技术观点讲，都可以归结于物理学的分支了. 当然，这里要推理演算，就要用数学，数学是一个工具"."天，地，生，数，理，化这六门基础学科在科学技术的体系中并不是完全同排并坐的，其中数学和物理又是其他四门学科的基础"（见［1］，521～525页）. 我同意钱学森的意见.

二　数学问题的来源

数学中最初的、最古老的问题都起源于经验，是由外部世界的现象提出来的. 整数起源于"数"，它的运算法则就是以这种方式在人类文明的早期被发现的. 最初的几何问题也是这样，如用圆规与直尺三等分任意角、化圆为方及二倍立方问题等. 以后的微积分、曲线论及傅里叶级数中最初的问题与来自天文学、力学与物理学的问题都是这样的. 但是随着数学的发展，它意识到自身的独立性，自身独立地发展着，通常不受明显的外部影响，而是借助于推理，对概念进行一般化、特殊化的综合分析来提出自已的问题. 例

如素数论与伽罗华理论等（见［4, 5］）. 由此可见，数学发展的动力与源泉有二：一是来自外部客观世界，二是来于自身发展的矛盾. 随着科学技术日新月异地发展，外部世界还会不断提出新的数学问题. “反右运动”后的二十年，左的干扰常常以所谓“理论联系实际”来否定纯粹数学研究，其思想本质就是否定数学发展的内部动力. 这就必然导至取消数学研究，甚至取消整个数学科学，其危害是非常大的. 其实华罗庚早在 50 年代即反复强调“从数学本身来说，它研究的最基本的对象是‘数’与‘形’. 因此，‘几何图形’所引出的几何直觉，和由‘数’而引出的具体关系和概念，往往是数学中极丰富的源泉”（见［6］）.

数学问题的选择对于数学研究与发展是至关重要的. 最早系统地指出这一观点的是希尔伯特在 1900 年国际数学大会的著名报告（见［4］）. 他在报告中特别提出三体问题与费马问题作为例子来说明一个好的数学问题对于推动数学发展的作用. 费马问题是说不定方程

$$x^n + y^n = z^n$$

当整数 $n \geqslant 3$ 时，没有非寻常解，所谓寻常解即为 $x=0$，$y=z$ 或 $y=0$，$x=z$. 这样一个非常特殊，似乎不重要的问题却对数学发展产生了十分重大的影响. 受这个问题的启发，库默尔引进了理想数并发现分圆域的整理想唯一素理想因子分解定理. 这个定理又被戴德金与克郎内克尔推广到任意代数数域，其意义已经远远超出数论范围而深入到代数与函数论等数学领域. 最近费马猜想的巨大进展及最终证明（发尔廷与怀尔斯）与代数几何、椭圆曲线、伽罗华表示论、模形式理论等的重大成就密切相关. 希尔伯特特别提出 23 个问题推荐给 20 世纪的数学家. 这些问题基本上都来自数学自身的矛盾. 例如第八问题就是黎曼猜想与两个变数整系数非齐次线性不定方程在素数中的求解问题. 后者包括哥德巴赫猜想与孪生素

数无穷猜想作为例子. 所谓哥德巴赫猜想是说, 每一个偶数≥4 都是两个素数之和. 由此可导出每个奇数≥7 都是三个素数之和. 所谓孪生素数对是指相差为 2 的一对素数, 例如 3, 5; 5, 7; 11, 13; …有一个猜想是说这种素数对有无穷多. 这两个问题都是很自然的. 众所周知, 自然数可以唯一分解成素数之积, 那么分解成素相加如何呢? 肯定不唯一. 但限制被加数个数为 2 或 3 又如何? 又已知素数有无穷多, 那么孪生素数对呢? 有限还是无穷? 这种问题成为解析数论最重要的研究对象. 由于研究这些问题, 导致了黎曼西塔函数零点分布理论、圆法、三角和估计方法与筛法等的产生与发展, 对数学发展起到了很重要的作用.

另一方面, 客观世界总是不停地给数学提供问题. 过去天文学、物理学与力学曾为微积分、微分方程与傅里叶分析等的产生与发展起过作用. 40 年代, 将数学方法用于军事与经济产生了运筹学. 概率论与数理统计的发展则是更早就受到工农业生产与军事的需要与刺激. 又如近代组合学与图论的发展就受到计算机科学的很大影响.

总之, 数学问题的两种源泉都是很重要的, 至今也远远没有枯竭.

什么是衡量数学成果的价值标准? 数学既然是一门独立科学, 那就不能把是否对其他学科有用当成唯一的价值标准或重要的价值标准. 数学除要求真实性外, 还要求"美". 什么是数学美? 这无疑带有一定的主观色彩, 也与数学家的文化背景有关. 哈代说过: "美是第一要素, 世界是不会给丑的数学以永久的位子的." 韦尔说过: "我的工作总是把美和真联系起来, 而当我必须作出选择时, 我通常选择美." 冯·诺依曼说: "我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准, 主要都是美学的." 庞加莱说: "数学家非常重视他们的方法和理论是否优美, 这并非华而不实的作风." 概括地

说：美就是“简单，清晰，对称，奇异”（见［4，5，7］）．当然应用数学作为一个学科登上数学科学的舞台恐怕还是近半个多世纪的事．除要求真与美外，还应该加上是否真正有用．从上述观点来衡量，这些年来，在纯粹数学方面，被证明的费马猜想、比仆巴赫猜想与鲁净猜想等都是非常符合数学美的标准的成就．在应用数学方面，如线性规划、快速傅里叶分析、有限元方法、蒙特卡罗方法与伪蒙特卡罗方法及小波分析等都是既简单而又非常有用的成就．

三 纯粹数学与应用数学

什么是纯粹数学？什么是应用数学？它们的界线怎样划分？这些都是颇为模糊的问题．纯粹数学与应用数学间很难划出严格的界线．上面已经说过，数学问题最初来自客观世界，往后则按其自身的规律发展，慢慢地脱离原来的问题，成为一个逻辑上完整的体系．从数学问题来看，由数学内部矛盾引出的问题来发展数学应属纯粹数学，问题来自客观世界应属应用数学．但还有些问题不是很明显的．从价值标准来看，纯粹数学总是将美与真放在一起，将数学美作为首要评价标准之一．应用数学除要求数学美之外，总还要有应用，至少是应用的前景．

可否将数学分成若干圈？最里面是纯粹数学，如数理逻辑、数论、代数、几何、拓扑、分析学．这些学科中的问题，都是来自数学的内部矛盾，应属纯粹数学．往外延伸，如微分方程、概率论、组合数学等则要具体分析．它们都已形成自身的理论体系，可以从自身内部矛盾来提出待研究的课题，也有以自然科学与工程技术为背景提出的研究课题．至于计算方法、数理统计与运筹学等，其实际背景就很清楚．如运筹学中的一些问题就是用数学语言来描写一个实际问题，然后再找出可行的求解方法，统计中的试验设计就是要科学地安排实验，使试验次数尽可能少，而得到的信息量尽可能

大些．在这里数学与自然科学及工程技术的关系就相当密切了．其价值标准除要求理论与方法简单明了外，是否真正有用就很重要，应该属于应用数学范畴．再从处理数学问题的手段来看，纯粹数学与应用数学也很有差异．纯粹数学中，证明定理的手段就是逻辑推理．应用数学则允许用模拟手段，例如有两个求整体极大的方法，我们将这两个方法用于一百个已知整体极大的例子，看看这两个方法各成功多少次？各耗去多少机器时间等，由此来说明这两个方法的优劣

以上只是一些个人意见，还需进一步深入思考．不妥之处欢迎批评指正．（1996年7月2日在上海大学报告）

参考文献

[1] 钱学森等，论系统工程（增订本），湖南科学技术出版社，1988.

[2] 马克思与恩格斯选集，三卷，人民出版社，1972.

[3] 胡世华，质和量的对立统一和数学，"哲学研究"，1，1979，55—64.

[4] 希尔伯特（D. Hilbert），Mathematische Probleme，Archiv f. Math. u. Phys; 3，1901.

[5] 瑞德（C. Reid），Hilbert，Springer Verlag，1971.

[6] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1957.

[7] 徐利治与王前，数学与思维，湖南教育出版社，1990

中国的数学现状与发展*

一 中国数学的现状

这是我在国内几乎任何场合下都会遇到的一个问题，但回答这个问题很不容易．我们缺乏起码的统计资料，也缺乏衡量数学水平比较一致的标准等，所以现在中国数学现状的分析与评估，应该说还是一个未开始起步的研究题目．

数学是炎黄子孙擅长的一门学问，从公元前 3 世纪到 14 世纪，中国曾对数学作过许多重要贡献，其中有些发现早于阿拉伯、印度与欧洲的发现达几个世纪．但 14 世纪后，中国的数学发展变得停滞，直到 17 世纪，才由一些传教士将西方的科学与数学传入中国，随后有一些发展，但并非西方的主流数学．中国近代数学的发展是本世纪 20 年代才萌芽，30 年代开始起步的．上面的估计，取材于李约瑟的“中国科学发展史”与 1977 年美国数学家访华代表团的报告（简称“报告”）．

该“报告”认为，从 1949 年到 1966 年的十七年，“是中国数学走向独立与成熟的形成时期”．“这十七年比历史上任何时候更活跃”．根据统计资料，1949 年至 1959 年这十年，中国共有 342 位

---

* 这是 1991 年 4 月 27 日在香港中文大学作为伟伦访问教授的公开演讲，并在 1991 年 5 月 19 日在南开数学研究所的一次会上，由李忠教授代为宣读，发表于《京港学术交流》，1991 年，7～10，及《科学》，1991，260～262．

数学家发表了983篇论文．1959年至1966年每年发表的论文总数是递增的，所以从1949年至1966年这十七年至少有450位数学家发表了1800篇论文．而1949年之前，总共只有74位数学家发表了342篇论文．这就是说数学家与论文数量均为1949年前总和的六倍．再以设备看，1949年前中国的最好的大学的数学系所具有的图书杂志亦极为贫乏．以浙江大学数学系为例，系图书馆只有20平方米，藏书与杂志不到二千册．其他有些大学恐怕只有几本大学教课书了．1949年后国家花了一些钱购置图书，不少大学与研究所的藏书与杂志都超过了万册．根据“报告”看法，中国在数论、拓扑、函数论、代数、计算数学与经典几何方面都有很好的成绩．中国的“数学学报”被美国数学会全文译成英文版．现在举几项成果：华罗庚的多复变函数论，吴文俊的拓扑学，陈景润的哥德巴赫问题，华罗庚的近似分析，冯康的有限元研究都曾应邀到国际数学大会作报告．

这一较好的势头，在文化大革命开始即告终结，数学研究全被中断，数学杂志被迫全部停刊．直到1972年，才恢复了两种杂志．1976年文化大革命结束，特别是这十年的改革开放，给中国的数学发展带来了转机．现在缺乏准确的统计资料来说明这个差别，只能估算一下．估计的方法是这样的，即中国科学院中与数学有关的九个单位约占全国数学研究力量的三分之一，数学所约占科学院数学力量的四分之一．从以下四个方面看：(1) 在国外出版的专著：1980年前共六本，现在已达到一百本以上，其中包括已出版与已签订合同者，也包括著作、编辑与讲义．总量上约为过去总和的二十倍．数学所已经搜集到四十多本．其中的五本书，我想说一下，即《单复变函数论》、《数论在中国》、《计算数学在中国》、《概率论在中国》与《统计在中国》，由中国人主编，中国人写文章系统地介绍中国的成就．这些书能够在外国出版，本身就标志着这些学科

的成就，决非无足轻重了．需说明，还有几个学科也达到了出版这类书的水平，而由于其他原因未能组织出版．大量专著在国外出版，至少标志着有一批数学家已做出较好的工作，是他们对自己从事的数学领域已有相当全面的了解．(2) 在国外发表的论文每年约300篇．国内重要杂志是300多篇（中国科学、数学学报、数学年刊与应用数学学报之和，即够300篇)．即每年论文总数约为1949年前的总和的二倍，1949年后十七年总和的三分之一．中国学者的论文在国内外学者的书与论文中被征引者的人数约200人（数论确切为20人，数论占整个数学不到十分之一)．(3) 数学的分科门类已较齐全，49年前几乎没有应用数学，49年后注意发展了偏微分方程、常微分方程、泛函分析、概率论、统计、计算数学、运筹学、控制论、数学物理与密码学等．经这几十年，均已壮大并趋于成熟，现在又兴起计算机科学的研究．原来有较大队伍的经典数学分支数论现在已是一个小学科了．(4) 设备有较大改善，例如科学院数学所的藏书有七万多册，有些图书馆已开始考虑用计算机来管理．由于复印机的逐步普及，资料的传递也比较方便．

下面想谈谈中国的数学与国际数学及国内各门学科间的比较．这是一个非常难准确回答的问题，现在只举一点侧面材料．根据科学出版社与外商合作出版的书的数量来看，数学约占总数的三分之一，而且很受外商重视．可以说中国各门科学的发展，数学还是较好的，这当然与数学的投资较少有关．至于中国的数学与数学的发达国家相比，应该说还有相当差距，特别与数学大国美、苏相比，差距更大．但不能以只有几位中国数学家被历届世界数学大会邀请作报告，就说明中国数学不行．众所周知，国际数学大会是由某些国家掌握的．去年在日本京都召开的国际数学大会，中国去了近七十人．大家都知道真正优秀的报告较少，大多数报告的水平，国内是有不少人也达到了这样的水平的．至于中国在亚洲，也许可以说

是数学强国之一．但另一方面，中国有十一亿多人口，更显得数学家与论文数量相对地说，太少了．另外，大陆的数学发展也很不平衡，主要集中在北京、上海等少数城市与少数科研机构与大学．

总之，我们既要对已取得的成绩有个恰当的估计，以增强我们的信心，也应该看到我们的不足之处，切不可盲目乐观，放松了我们的努力．

二 中国数学发展中的几个问题

（1）要坚持贯彻“双百方针”与继续并扩大改革开放．可以这样说，49年之前只有个别人在做数学研究，49年之后的十七年，是少数单位在做研究，现在则是在大得多的面上搞研究．这是由于“双百方针”与改革开放在起作用．只要举一个简单的例子，刚开放时，外国数学家来作报告都要配上翻译才行，现在有一百余本英文专著已在或即将在国外出版，国内出版的英文版数学杂志就近十种．能用英文写文章，能听英文演讲者，至少千人以上．这只是从一个侧面反映了改革开放的好处．这些年大量数学家出国交流，对于他们的科研方向的确定，了解最新研究动态等都具有决定性的好处．这些年来，不少人来香港访问开会，更近与方便，对国内数学发展很有帮助．香港出版的杂志论文集国内也有投稿，我想这点大家都清楚，总之，要有一个宽松的思想环境，有一个开放的环境．

（2）增加横向联系，加强对数学的宏观领导．改革开放后，数学在各地都搞起来了，重点的研究所与著名大学的重要性在相对降低，每个单位的力量又都不足，大家对加强合作，以便于做些大的事情的愿望很强烈．中国数学会是数学家选举产生的机构，历届中国数学会在促进中国数学界的横向联系上都发挥了很大作用．中国数学会能够做一些工作的最重要的原因就是有一个非常团结与合作，相对年轻与务实的领导集体，对中国数学现状比较了解，做到

办事基本上公正．中国数学会的工作除经常的学术交流，数学普及与出版工作外，并做了下面几件事．Ⓐ举办了有54个国家与地区参加的第31届国际数学奥林匹克（简称IMO）．这件事的意义远不止是得了五块金牌，一个团体冠军．我们组织了十多位高水平的数学家对各国提出的一百多道试题进行了分析、简化与改进，从中选出二十八个题供各国领队挑选，结果选中的六道题中，除一个题目外，其余五道题都是我们预见到的，证明我国的数学水平是较高的．我们组织了中国科学院、北京大学、复旦大学、中国科技大学、南开大学等单位七十位中年优秀数学家担任调协员，对各国领队的评卷进行了核查．我们的人中有十七位博士生导师，有懂得英、俄、德、法、朝鲜等文的数学家．这两项工作反映了中国的整体数学水平，得到各国的一致好评．特别是大大鼓励了亚洲国家，这种过去一直由白种人操办的事，亚洲人也能做了．大家期待香港能在1994年举办好第三十五届IMO，香港是有实力的．Ⓑ组织约五十人参加在日本京都召开的国际数学大会及会后的一系列学术活动，开阔了眼界，增强了信心．大陆与台湾联合参加IMU的会议．Ⓒ组织约七十人参加在香港召开的第一届亚洲数学大会，世界著名数学家邱成桐、吴文俊应邀作报告，影响很大．这次大会提高了亚洲数学地位．中国大陆约有十人应邀作了大会报告与邀请报告，还有约十人主持了讨论会，大面积地宣传了中国的数学成就．大陆还准备举办以后的亚洲数学家大会，盼望得到香港各界支持．Ⓓ组织学术专著到国外出版，仅通过科学出版社联系的就不下二十本．这里要说明一下，目前可能会有较大难度，这是由于苏联与东欧已开放，我们面临更激烈的国际竞争．Ⓔ组织翻译十卷苏联数学百科全书．约八百万字，这一工作的进展也很顺利．Ⓕ组织讨论钱学森教授关于数学科学及数学教学改革的意见．Ⓖ组织评审“陈省身数学奖”．总之，中国数学会还要做更多的工作以促进中国的数

学发展.

(3) 适当增加投入与经费支持. 数学为其他学科提供了许多结果、方法、工具, 是科学技术的基础. 数学在训练与培育人才方面也有着重要作用. 纯粹数学的研究也属于精神文明建设范畴, 能反映一个民族的文化修养深度, 应用数学与计算机科学则更有广泛的联系与使用的场地, 均是很重要的, 也是可能超前发展的. 前面列举的数字说明数学的出版物数量早已翻了两番, 但无论对青年数学家的培养还是科研条件的改善, 特别是边远地区的研究条件的建立, 都显得经费相当紧张. 物价上涨后, 科研教学的投资往往不能同步增长. 由于交通、住宿、伙食费上涨均很快, 现在进行学术交流就显得日益困难. 这些年来, 很感激国家自然科学基金委尽力对数学研究作了支持, 又设立了"天元基金"加以支持. 基金是支持基础理论研究的好形式, 我们还盼望得到有关方面给予数学研究更多的注意与大力支持.

(4) 大力培养与提拔青年数学家. 首先我们是有不少优秀青年数学家在成长着, 但由于需要量大增而仍然显得人才很不足. 我提供几个材料: 在今年的概率统计年会上, 二百多名参加者中, 四十岁以下者占三分之二, 即一百多人. 在北京举办的密码学讨论班上, 四十岁以下者亦占三分之二, 约七、八十人. 再以数学所为例, 三十岁左右的人, 工作十分活跃, 更以数论这一学科看, 活力最大的人很快就会明显地显示出来也是年青人了. 我想培养青年数学家的一个好办法就是严格要求他们, 让他们作为课题组的负责人或把他们吸收到各级领导岗位上来, 给他们加重担子, 使他们增强责任感、使命感、人生价值感. 这样不仅能更大地发挥他们的作用, 还能增加他们的爱国心与凝聚力. 他们是中国数学真正的力量所在, 真正的未来, 他们很愿意作出奉献. 当然也需为他们解决工作条件与生活中的困难, 较大幅度地提高他们的待遇. 在这方面可

以采取合理的倾斜政策，但要防止吃大锅饭，搞平均主义.

(5) 加强对中国数学现状的分析与研究. 对论文的数量与专著的数量需要有精确的统计与分析. 首先要建立健全档案与资料，在这个基础上才谈得上对中国的数学现状与水平进行准确的评估. 这是很基础的工作，现在还没有一个单位来抓，更谈不上起步来搞了. 目前有个好现象，就是对近代中国数学史的研究开始起步了，这是很重要的. 历史是一面镜子，研究近代中国数学史与数学家，目的在于吸收好的经验及避免失败的教训，以便更好地前进. 但要防止一哄而上的现象.

(6) 端正学风，提倡学术道德. 我见到个别国家中，数学家的生活与工作条件都不错，但数学并搞不起来. 我想我们老一辈的数学家那种艰苦奋斗的精神及优良的学术道德与作风是一个很优良的传统，要保持与发扬光大. 我想学术道德应包含热爱真理，坚持真理，老老实实，严肃认真地做学问，积极向上，尊敬有学问的人，爱护有才干的青年人等这些具体内容. 这决不是一件小事. 这个问题以及其他问题，如果处理得不好，中国的数学事业的发展就有可能蒙受意想不到的损失. 就目前来说，中国的数学研究应该特别强调提高质量. 总之，我们要加强正确的引导.

关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题(与华罗庚合作)*

一 引 言

感谢我国的地理、矿冶与地质工作者们,他们向我们介绍了不少计算矿藏储量与计算坡地面积的实用方法,使我们能学习到这些方法,从而进行了一些研究.作者试图在本文中对这些方法进行比较,阐明它们相互之间的关系与这些方法的偏差情况,并提出若干建议.

关于分层计算矿藏储量方面,在矿体几何学上(见[2]~[4])有 Бауман 公式,截锥公式与梯形公式.设用它们算出来的矿藏体积分别为 v, v_1 与 v_2.本文证明了它们满足不等式:

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2,$$

并且完全确定了取等号的情况.关于这三个公式的比较问题,作者认为主要应从量纲来看,因此我们认为 Бауман 公式的局限性较少.

本文提供了一个双层合算矿藏储量的公式,这个公式的获得首先在于我们找到了 Бауман 公式的一个新证明.这个证明既简单,又易于进一步改进.它的优点在于比 Бауман 公式麻烦得并不很多,但比 Бауман 公式多考虑了一些因素,同时也比 Соболевский 公式(即通

---

* 原载《数学学报》,1,1961,29 ~ 40.

常的双层合算矿藏储量的公式,见[2]~[4])多考虑了一些因素.我们推荐它供我国矿藏储量计算工作者参考或试用.

关于坡地面积的计算方面,在地理学上常用 Волков 方法(见[5]~[6]);在矿体几何学上,则常用 Бауман 方法(见[1]~[2]).本文指出,Бауман 方法比 Волков 方法精密,但用这两个方法算出的结果常比真正的结果偏低.本文完全定出了能够用这两个方法来无限精密地计算其面积的曲面及指出这两个方法的偏差情况.详言之,偏差依赖于曲面上点的倾角的变化.只有当整个曲面上各点的倾角都相差不大时,Волков 方法才能得到精确结果,而只有当曲面在相邻两等高线间的点的倾角的变化不大时,Бауман 方法才能给出精密的结果.然而在其他情况下,用这两个方法的误差就可能比较大了.因此我们建议在等高线图上通过制高点引进若干条放射线,当曲面与直纹面相近时,可以分别求出相邻两条放射线间的表面积,然后总加起来.如果相邻两条等高线间与相邻两条放射线间,曲面的倾角的变化都比较大时,可以分别算出由放射线及等高线所织成的每一小块的表面积,然后总加起来.这样算出的结果,偏差就比较小了.

二 矿藏储量计算

1. Бауман 方法.

假定有一张矿藏的等高线图,高程差是 h,地图上所表示的一圈,实际上便是一定高程的矿体的截面积.我们来估计两张这样的平面之间的矿藏的体积.这两张平面之间的距离便是高程差 h.我们以 A,B 各表示下、上两个等高线圈所包围的截面(见图 1,它们的面积亦记为 A,B).Бауман 建议用

$$v=\left[\frac{1}{2}(A+B)-\frac{T(A,B)}{6}\right]h \tag{1}$$

来估算这两个高程间的一片的体积 v,此处 $T(A,B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积,称它为 Бауман 改正数.

如图 2 中,从制高点 O 出发,作放射线 OP,这条放射线在地图上 A,B 之间的长度是 l.另作图 3,取一点 O',与 OP 同方向取 $O'P'=l$.当 P 延着 A 的周界走一圈时,P' 也得一图形,这个图形的面积就称为 Бауман 改正数.因为它依赖于两截面 A 与 B,所以我们用 $T(A,B)$ 来表示它.



图 1

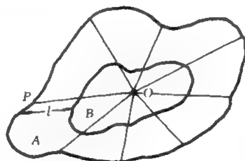


图 2

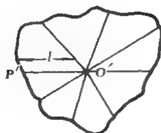


图 3

把算出来的矿体体积一片一片地加起来，就得到矿藏的体积 V. 换言之，设矿体的等高线图的 $n+1$ 条等线所围成的面积依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，则矿体的体积 V 由下式来近似计算：

$$V = \left(\frac{S_0 + S_n}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} S_m\right)h - \frac{h}{6}\sum_{m=0}^{n-1} T(S_m, S_{m+1}), \qquad (2)$$

此处 h 为高程差(图 4).

定理(Бауман)　已知物体的下底 A 与上底 B(其面积亦记为 A, B) 均为平面，且 A 平行于 B，h 为它们之间的高，O 为 B 上一点. 若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体，所得的截面都是四边形，则物体的体积 v 恰如(1) 式所示.

证：以 O 为中心，引进极坐标(见图 5). 命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z,\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,0) = \rho(z,2\pi)$. 今后我们常假定 $\rho(z,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z \leqslant h)$ 是连续的. 我们不妨假定 A, B 的高程各为 0 及 h，并且记

$$\rho_1(\theta) = \rho(0,\theta), \quad \rho_2(\theta) = \rho(h,\theta).$$

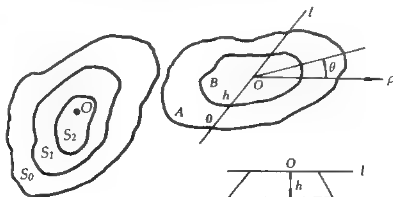


图 4　　　　图 5

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)(0\leqslant z\leqslant h).$$

因此物体的体积为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\\&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\&\quad-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,B).\end{aligned}$$

定理证完.

2. Бауман 公式,截锥公式与梯形公式的关系.

假定物体的下底 A 与上底 B 均为平面,且 A 平行于 B,h 为它们之间的高,O 为 B 上一点.除 Бауман 公式外,常用下面两公式来近似计算物体的体积:

$$\text{截锥公式}:v_1=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}),\tag{3}$$

$$\text{梯形公式}:v_2=\frac{h}{2}(A+B),\tag{4}$$

通常当 $\frac{A-B}{A}>40\%$ 时,用公式(3),而当 $\frac{A-B}{A}<40\%$ 时,用公式(4).

定理 1 不等式

$$v\leqslant v_1\leqslant v_2\tag{5}$$

恒成立.当且仅当物体为截锥,且此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时,$v=v_1$;当且仅当 $A=B$ 时,$v_1=v_2$.

证：如 Бауман 定理中的假定. 由 Бауман 公式及 Буняковский – Schwarz 不等式可知

$$v = \frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta) + \rho_2^2(\theta) + \rho_1(\theta)\rho_2(\theta))\mathrm{d}\theta \leqslant$$
$$\frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\mathrm{d}\theta}\right]$$
$$= \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) = v_1,$$

当且仅当 $\rho_1(\theta) = c\rho_2(\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, c 为常数) 时, 即当这个物体为一截头锥体, 而此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时, 才会取等号(图 6).

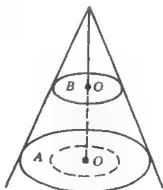


图 6

又由于

$$v_2 - v_1 = \frac{h}{2}(A + B) - \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) = \frac{h}{6}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \geqslant 0,$$

所以

$$v_1 \leqslant v_2,$$

当且仅当 $A = B$ 时取等号. 定理证完.

关于这三个公式的比较问题, 我们认为主要应该从量纲来看. 面的量纲为 2, 所以把面的量纲考虑为 1 所得出的公式, 局限性往往是比较大的.

梯形公式是把中间截面看成上底与下底的算术平均而得到的, 所以把面的量纲当作 1.

Бауман 公式则是将中间截面作为量纲 2 来考虑的. 详言之, 它假定了 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的线性关系而得到的(见 1).

截锥公式亦是将中间截面的量纲考虑为 2, 但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0,\theta)=c\rho(h,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 此处 c 为一常数.

因此我们认为 Бауман 公式更具有普遍性, 所以用它来近似计算物体的体积, 一般说来, 应该比较精确. 但这并不排斥对于某些个别物体, 用其他两个公式更恰当些的可能性. 例如有一梯形, 其上底与下底的宽度相等(如图 7 所示). 用梯形公式反而能获得它的真正体积, 而用 Бауман 公式与截锥公式来计算, 结果就偏低了. 不过, 我们注意此时这个梯形的截面的量纲为 1(由于沿 y 轴未变).

相对于 Бауман 公式, 我们还可以估计用梯形公式与截锥公式的相对偏差.

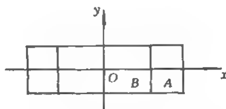


图 7

例如当 $\frac{A-B}{A}<40\%\left(\text{即 } B>\frac{3}{5}A\right)$ 时, 用梯形公式算出的结果相对于 Бауман 公式算出的结果的相对偏差为

$$\Delta=\frac{v_2-v}{v}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(A+B)h-\frac{1}{2}(A+B)h+\frac{h}{6}T(A,B)}{\frac{1}{2}(A+B)h-\frac{h}{6}T(A,B)}$$

$$= \frac{T(A,B)}{3(A+B)-T(A,B)}.$$

因为 $T(A,B) \leqslant A - B\left(即\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)\mathrm{d}\theta,此不等式显然成立\right)$,所以

$$\Delta \leqslant \frac{A-B}{2A+4B}.$$

再以条件 $B > \frac{3}{5}A$ 代入,得

$$\Delta \leqslant \frac{A-\frac{3}{5}A}{2A+\frac{12}{5}A} = \frac{1}{11} < 10\%.$$

3. 建议一个计算矿藏储量的公式.

Бауман 公式是假定 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的线性关系而得到的.如果我们将两相邻分层放在一起估计,即已知相邻三等高线 $\rho(0,\theta)$, $\rho(h,\theta)$ 与 $\rho(2h,\theta)$,那么我们用通过 $\rho(0,\theta)$, $\rho(h,\theta)$ 与 $\rho(2h,\theta)$ 的抛物线所形成的曲面 $\rho=\rho(z,\theta)$ 来逼近矿体这两分层的表面,因此我们建议用如下的计算方法.

命 A,B,C 分别表示连续三等高线所围成的截面(面积亦记为 A,B,C), A 与 B 及 B 与 C 之间的距离都是 h,则这两片在一起的体积可用以下公式来近似计算

$$v_3 = \frac{h}{3}(A+4B+C) - \frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C) - T(A,C)). \tag{6}$$

如果不计(6)式中的第二项,就是熟知的 Соболевский 公式.把二片二片的体积总加起来,就得到矿藏的总体积 V 的近似公式.换言之,设矿藏的等高线图的 $2n+1$ 条等高线所围成的面积依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$,而高程差为 h,则矿藏的体积 V 由下式来近似计算

$$V = \frac{h}{3}\left[S_0 + S_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} S_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} S_{2i}\right]$$
$$- \frac{h}{15}\Big[2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i+1}, S_{2i+2})$$
$$- \sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+2})\Big]. \tag{7}$$

注意:如果等高线图含有偶数条等高线,则最上面一片可以单独估计,其余的用公式(7).

定理 2 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面,B 为中间截面(面积亦分别记为 C, A, B),且 A, C 都与 B 平行,A 与 B 之间及 B 与 C 之间的距离都是 h,O 为 C 上一点(图 8).若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体,所得的截面的周界均由两条直线及两条抛物线所构成,则物体的体积 v_3 恰如(6)式所示.

证:以 O 为中心,引进极坐标,命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z,\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \rho(z,0) = \rho(z,2\pi)).$$

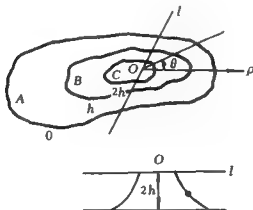


图 8

不妨假定 A, B, C 的高程分别为 $0, h, 2h$，并且记

$$\rho_1(\theta) = \rho(0,\theta), \rho_2(\theta) = \rho(h,\theta), \rho_3(\theta) = \rho(2h,\theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta) = \frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta) - \frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta) + \frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta). \tag{8}$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2h}\Big[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta) \\
&\quad - \frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta) + \frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\Big]^2\mathrm{d}z \\
&= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta) + \frac{16}{15}\rho_2^2(\theta) \\
&\quad + \frac{4}{15}\rho_3^2(\theta) + \frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta) + \\
&\quad + \frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta) - \frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\Big]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3} + \frac{4\rho_2^2(\theta)}{3} + \frac{\rho_3^2(\theta)}{3} \\
&\quad - \frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2 - \frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2 \\
&\quad + \frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_3(\theta))^2\Big]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{h}{3}(A+4B+C) - \frac{h}{15}(2T(A,B) \\
&\quad + 2T(B,C) - T(A,C)).
\end{aligned}$$

定理证完.

三　坡地面积计算

4. Бауман 方法及 Волков 方法.

现在先介绍矿学家及地理学家所常用的方法，假定地图上以 Δh 为高程差画出等高线，今后我们常假定有一制高点及等高线成圈的情况来讨论(其他情况也可以十分容易地被推出来)．我们假定由制高点出发，向外一圈一圈地画出等高线(l_{n-1})，(l_{n-2})，…，(l_0)(图9)．记(l_0)的高度为0，而制高点用(l_n)表之，它的高度是 h，(l_i) 与 (l_{i+1}) 之间的面积用 B_i 表示(即投影的面积)．

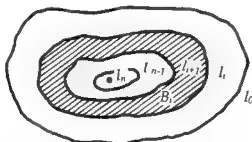


图 9

Ⅰ．矿体几何学上常用的方法的步骤如下：

a. $C_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h$(中间直立隔板的面积)；

b. $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的渐近值(Бауман 方法)．

Ⅱ．地理学上常用的方法的步骤如下：

a. $l = \sum_{i=0}^{n-1} l_i$(等高线的总长度)，$B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$(总投影面积)，$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta h \cdot l}{B}$(平均倾角)；

b. $B\sec\alpha = \sqrt{B^2 + (\Delta h \cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的渐近式

(Волков 方法).

附记:$\sqrt{a^2+b^2}$ 可以借商高定理,用图解法很快求出.

这两个方法哪一个更好一些?这些方法给出的结果在怎样的程度上迫近斜面积?换句话说,当等高线的分布趋向无限精密时(也就是 $\triangle h\to 0$ 时),这些方法所给出的结果是什么?是否就是真正的斜面积呢?一般说来,答案是否定的.仅仅是一些十分特殊的曲面,答案才是肯定的.我们将在下面定出这些曲面,并将给出这些方法和实际结果的相差比例,同时指出避免较大偏差的计算步骤.

5. Бa, Bo 与 S 的关系.

以制高点(l_n)为中心 O,引进极坐标.命高度为 z 的等高线方程为

$$\rho=\rho(z,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$.我们在今后常假定$\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial\theta}$与$\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial z}$($0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z\leqslant h$)都是连续的.命 $z_i=\frac{h}{n}i$,则 l_i 所包围的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\theta)\mathrm{d}\theta,$$

所以由中值公式可知

$$\begin{aligned}B_i&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\rho^2(z_i,\theta)-\rho^2(z_{i+1},\theta)]\mathrm{d}\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\rho(z'_i,\theta)\frac{\partial\rho(z_i',\theta)}{\partial z_i'}\mathrm{d}\theta\triangle h,\end{aligned}$$

此处 $z'_i\in[z_i,z_{i+1}]$,而 $\triangle h=\frac{h}{n}$.另一方面,(l_i)的长度等于

$$l_i=\int_{(l_i)}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的结果是

$$C_i = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i'',\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i'',\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\,d\theta\triangle h,$$

这里用了中值公式，$z_i'' \in [z_i, z_{i+1}]$，因此当 $\Delta h \to 0$ 时，$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Бa} = \int_0^h\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}d\theta\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}d\theta\right)^2}\,dz. \quad (9)$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\triangle h \to 0$ 时所趋向的数值.

又易见

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(0,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz$$

（注意：$\rho(h,\theta)=0$）及 $\triangle h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{n}\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}d\theta,$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积，当 $\triangle h \to 0$ 时，所趋向的数值为

$$\text{Bo} = \sqrt{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}dz\right)^2}. \quad (10)$$

由于

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2\right]d\theta^2+2\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\rho}{\partial z}d\theta dz + \left(1+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2\right)dz^2,$$

所以斜面的面积 S 为

$$S = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,d\theta. \quad (11)$$

为了比较 Ба, Bo 与 S, 我们引进一个复值函数

$$f(z,\theta)=\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}, \tag{12}$$

则得

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\mathrm{d}\theta\right|\mathrm{d}z, \tag{13}$$

$$\text{Bo}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right|, \tag{14}$$

及

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{15}$$

因此显然有不等式

$$\text{Bo}\leqslant\text{Ба}\leqslant S. \tag{16}$$

由此可见: (i) Бауман 方法比 Волков 方法精密; (ii) 所求出的结果比真正的结果偏低一些; (iii) Бауман 方法既然偏低, 因此可以作如下的修改, 即取 $C_i=l_i\triangle h$. 这样既简化了算法又增大了数值.

现在来考虑 Bo $=S$ 及 Ба $=S$ 的曲面. 先讲下面的引理:

引理 若 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 中的复值函数, 此处 a,b 均为实数, 则等式

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x \tag{17}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虚实部分之比为常数.

证: 命 $f(x)=\rho(x)e^{i\theta(x)}$, $\rho(x)\geqslant 0$, 而 $\theta(x)$ 是实函数. 显然如果 $\theta(x)$ 为与 x 无关的常数, 则 (17) 成立. 反之, 由于

$$\left(\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\right)^2=\int_a^b\int_a^b f(x)\overline{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\int_a^b\rho(x)\rho(y)e^{i(\theta(x)-\theta(y))}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)\cos[\theta(x)-\theta(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^2 = 2 \iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b} \rho(x)\rho(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因而若(17)成立,则必

$$\cos(\theta(x) - \theta(y)) \equiv 1,$$

即 $\theta(x) \equiv \theta(y)$. 此即引理所需.

易知对于多重积分,引理依然成立.

由引理可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Bo} &= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^h f(z,\theta)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \right| \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h |f(z,\theta)| \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = S\end{aligned}$$

成立的必要且充分的条件为 $f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数 c,则得偏微分方程

$$\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 = c^2\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2. \tag{18}$$

换言之,仅有适合这个偏微分方程的函数 $\rho = \rho(z,\theta)$, Волков 方法才能给出正确答案. 这当然要适合以下的条件: $\rho(h,\theta) = 0$(这是制高点)及 $\rho(0,\theta) = \rho_0(\theta)$(这是曲面的底盘方程).

我们并不解这个偏微分方程,而是从它的几何意义入手. 把 θ 与 z 看成参变数,即

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数,由

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta, && \frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta, \\ &\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0, && \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta, \\ &\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta, && \frac{\partial z}{\partial z} = 1\end{aligned}$$

得知在曲面上的点(θ, z)的法线方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,\ -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

由(18)可知它与 z 轴的交角 α(即点 (θ,z) 的倾角)的余弦等于

$$\cos\alpha=\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

是一常数.也就是说,这个曲面的切平面与地平面(即 xy 平面)成一固定角度 α.我们来说明这样的曲面的几何性质.

从制高点向 xy 平面作任一垂直平面,这个平面与该曲面的交线有以下性质:这条曲线上每一点的切线与 xy 平面的交角为 α.因此,它是一条直线.

从任一平面封闭曲线 (l_0) 作底盘,以任一投影在盘内的点 (l_n) 作制高点.通过制高点与底盘垂直的直线称为轴.通过 (l_0) 上任一点 A 作一直线,它在 A 与轴所成的平面上,与底盘的交角是 α.这样直线所成的图形便是适合 Bo = S 的图形.

所以,如果有最高峰,而且向下看没有陡峭的角度,则仅有以下的曲面才能 Bo = S:底盘是圆或圆的若干切线形成的多角形或一些圆弧及一些切线所形成的图形,轴的尖端在通过圆心而垂直于底盘的直线上(见图 10).

通俗些说,只有蒙古包,金字塔和一些由此复合出来的图形,才能由 Волков 方法来无限逼近.

但什么时候 Ба = S 呢?当然 Bo = S 的时候 Ба = S.除掉上面所求的曲面,还有其他曲面否?答案:有.证明如下:从

$$\begin{aligned}\text{Ба}&=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\mathrm{d}\theta\right|\mathrm{d}z\\&=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=S\end{aligned}$$

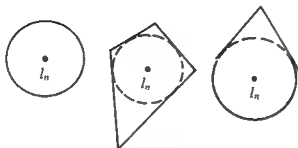


图 10

得出

$$\int_0^h \left(\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| \mathrm{d}\theta - \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) \mathrm{d}\theta \right| \right) \mathrm{d}z = 0.$$

因为积分号下的函数是非负的,因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| \mathrm{d}\theta = \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) \mathrm{d}\theta \right|.$$

因此当固定 z 时,$f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数,即方程(18) 中的 c 是仅为 z 的函数.所以仅有下面的曲面才能 Бa $= S$:高程相同之处,曲面有相同的倾角.用通俗的话说,只有葫芦,白塔(北海),才能由 Бауман 方法来无限逼近.

现在我们来估计一下这两个方法给出的结果的偏差情况.假定曲面上点的倾角的余弦介于两正常数 ζ 与 η 之间,即

$$\zeta \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta,$$

即

$$\zeta \leqslant \frac{-\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2}} \leqslant \eta,$$

由此可得

$$\frac{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}\geqslant 1-\eta^2,$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\geqslant\sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2\mathrm{d}z}=\sqrt{1-\eta^2}S,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\geqslant\zeta S,$$

因此

$$\mathrm{Bo}\geqslant\sqrt{\zeta^2S^2+(1-\eta^2)}S=\sqrt{1+\zeta^2-\eta^2}S.$$

又因为 $1>\eta\geqslant\zeta>0$，所以

$$\frac{\zeta}{\eta}\leqslant\sqrt{1+\zeta^2-\eta^2}$$

（将两端平方，此式即 $(\eta^2-\zeta^2)(1-\eta^2)\geqslant 0$），即得

$$\mathrm{Bo}\geqslant\frac{\zeta}{\eta}S.$$

总而言之，我们证明了下面的定理：

定理 3 若曲面 $\rho=\rho(z,\theta)(0\leqslant z\leqslant h,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 上任一点的倾角 α 的余弦都满足 $0<\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta$，则不等式

$$\frac{\xi}{\eta}S\leqslant\mathrm{Bo}\leqslant\mathrm{Ба}\leqslant S \tag{19}$$

成立. $\mathrm{Bo}=S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的倾角，$\mathrm{Ба}=S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的倾角.

6. 算法建议.

由定理 3 可以看出只有当曲面上的点的倾角变化不大时，Волков 方法才能得到精确结果，而只有当曲面在相邻两高程间的点的倾角相差不大时，Бауман 方法才能给出精密的结果. 而在其他情

况下，用这种方法的误差就可能比较大了.

因此我们建议如下的算法：在等高线图上(图 11)，通过制高点 l_n 引进若干条放射线 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{m-1}$，其中 θ_j 的幅角等于$\frac{2\pi j}{m}$. 放射线 θ_j, θ_{j+1} 与等高线 l_i, l_{i+1} 所围成的面积记为 d_{ij}；l_i 被θ_j 与θ_{j+1} 所截取的一段的长度记之为 l_{ij}.

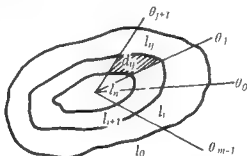


图 11

方法 Ⅰ. a. $D_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij}$(等高线图在放射线 θ_j 与 θ_{j+1} 之间的面积)；

b. $E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right)\Delta h$(中间隔板在两直立墙壁之间的面积之和)；

c. $\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面面积的渐近值.

方法 Ⅱ. a. $e_{ij} = l_{ij}\Delta h$(中间隔板在两直立墙壁之间的面积)；

b. $\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_{ij}^2 + e_{ij}^2}$ 就是所求曲面面积的渐近值.

与上段相同的方法可知

$$K = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\int_0^h \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} dz\right)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \int_0^h f(z,\theta) dz \right| d\theta \tag{20}$$

及

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} dz d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h | f(z,\theta) | dz d\theta \tag{21}$$

分别为当 $n \to \infty$, $m \to \infty$ 时，σ_1 与 σ_2 所趋近的数(关于 $f(z,\theta)$ 的定义请参看(12)式).

显然 $Bo \leqslant K \leqslant S$(见(10))，同上段的方法可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直纹面．由于 σ_2 趋于真面积，所以方法 II 最为精密可靠.

参 考 文 献

[1] B.И. Бауман, К Вопросу о подсчета запасов полезных ископаемых, *Горный журнал*, Декабрь, 1908.

[2] 乌沙阔夫(И.Н.Ушаков)，矿藏几何学，煤炭工业出版社，1957.

[3] 雷若夫(П.А.Рыжов)，矿体几何学，地质出版社，1957.

[4] 依札克松(С.С.Изаксон)，矿产储量计算的验算和计算误差的确定，煤炭工业出版社，1958.

[5] 伏尔科夫(Н.М.Волков)，量图原理和方法，1950.

[6] 陆澍芬，在等高线地图上计算地表面面积的问题，测量制图学报，4卷1期，1960.

《数学百科全书》出版说明*

数学的重要性是妇孺皆知的．只要看看一个人从进小学开始到大学毕业为止，数学系以外，不论那一个专业，学习数学课的时间都有十二年至十四年之久，就可以明白这一点．在电脑已相当发达与普及的今天，数学更有了广阔应用的场地．除传统的学科，如天文，力学，物理，化学与工程技术外，生命科学，地学，经济学，军事科学与管理科学等也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展．

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义与特定的记号，它的研究对象是“抽象”的数量关系与空间形式．对于没有相当的训练与基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏．另一方面，数学发展得很快，文献呈指数增长，浩如烟海．一个人很难了解数学的许多方面，这就使得数学的应用的困难加重了．

原苏联科学院院士，世界著名数学家维诺格拉朵夫（I. M. Vinogradov）为首，组织了上百位数学家，撰写编辑了一套《数学百科全书》，共约八百万字，它的重要性是极为显著的．美国立即组织大量数学家将它译成英文，并对一些“条目”作了补充．

当得知《数学百科全书》在原苏联出版时，中国很多著名数学

* 这是为原苏联《数学百科全书》撰写的．该书已由科学出版社出版，1994．

家与数学老师，纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国数学家，特别是广大科技工作者有一本很好的工具书，可以从中查询到所需的数学知识及作进一步了解的线索．这无疑是一件十分重要的事情．

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持中国广大数学家与科技人员的要求，立即领导与组织了原苏联《数学百科全书》的翻译工作，并将它列为中国数学会的最重要的工作之一来做．由于这项工作得到了中国广大数学家的支持与参予，所以翻译工作进展非常快．必须指出，这项工作，从头到尾都得到科学出版社的大力支持，他们将这项工作作为该社的一项重点特急任务来抓．我们拟将全书分为五卷出版．现在第一卷即问世了．

本书除中文简体字版本外，还有繁体字版由科学出版社排版，而由台湾九章出版社出版发行，这也是海峡两岸数学家与出版界人士的良好合作．这样，在海外的学者与炎黄子孙都得一览本书，从中受益．

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授撰写《中文版序》，苏步青，陈省身，吴文俊，程民德教授出任名誉编委．对于他们的支持，谨致以衷心的感谢．

最后，对于书中的欠妥与错误之处，还望读者不吝指教．

《中国科学技术专家传略》（数学卷）前言*

数学既是一门基础学科，又是其他学科的有力工具．不仅物理学，天文学，化学，技术科学需要愈来愈多的数学，就连生物学，地学，医学，经济学，管理科学等乃至日常生活也日益需要数学．电脑的发展与普及更为数学向其他领域渗透提供了有力的武器．其原因在于数学研究的对象是现实世界的数量关系与空间形式，而“数”与“形”是出现于一切科学技术之中的．正像马克思所说：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步．”

数学是炎黄子孙擅长的一门学问．从公元前 3 世纪到 14 世纪，中国曾对数学作过许多重要贡献，其中有些发现早于阿拉伯、印度与欧洲的发现达几个世纪．例如汉朝刘徽的割圆术（约在 263 年），南朝祖冲之（429～500 年）用密率$\frac{355}{113}$来近似计算 π，肇源于“孙子算经”（汉时书籍）而发扬光大于秦九韶的“数书九章”（1247 年）中的“大衍求一术”，及秦九韶的方程近似求解法等，都是很辉煌的成就．但 14 世纪以后，中国的数学发展变得停滞，明显地落后了．直到 17 世纪，才由一些传教士将西方的自然科学与数学

* 这是为《中国科学技术专家传略》数学卷写的前言．该书已由河北教育出版社于 1996 年出版．

传入中国，随后有一些发展，但仍脱离西方数学之主流．因此要发展中国的现代数学，还不能继续中国自己的传统．

中国现代数学的研究与教学，只能另起炉灶．由一些早期留学欧美及日本的留学生将近代数学知识带回中国，培养学生，逐步在中国进行开拓，生根发芽，开花结果．中国现代数学的研究与教学直到本世纪 20 年代前后刚开始起步．

辛亥革命后，“京师大学堂”改为“北京大学”，1917 年始设算学门，有冯祖荀与秦汾在执教，自 30 年代初，江泽涵，申又枨，陈毓准加入后，学术水平方有大提高．“南开大学”的算学系是姜立夫于 1920 年创办的．南方的“东南大学”的数学系创办于 1921 年，最早的执教者有熊庆来，何鲁，段调元．“武昌高等师范学堂”自从 1921 年，陈建功往任教后，始有起色．直到 1929 年与 1931 年，陈建功与苏步青分别去“浙江大学”执教，浙江大学才成为中国数学的研究与教学的中心之一．郑之蕃于 1920 年来“清华学校”任教，他是该校算学系的创办人之一．1927 年他邀请熊庆来来“清华大学”执教并主掌算学系，从此清华大学算学系大有起色．

以数学为主科在国外得到博士学位的中国人还非常少，其中的一些人又由于种种原因，未能对发展中国数学作出较大贡献，实在可惜．那时的数学系均以教学为主，研究工作则寥若晨星．图书设备更为匮乏，再加以军阀擅权，战火频起，各大学逐年欠薪，教职员生活颠沛．在这种情况下，必须以极大的毅力才能坚持工作．

北伐胜利，人心振奋，生活趋于安定．至 1930 年前后，中国的科学与教育的发展开始进入一个好时期．华罗庚，陈省身，许宝騄等就是在这一时期开始数学研究工作的一批年青人．可惜这个时期只延续了几年就爆发了抗日战争．

抗日战争爆发后，著名大学纷纷迁至四川，云南，贵州一带．由于日本的封锁，图书杂志几乎断绝，生活之困难更是人人皆知之

事．在这样的情况下，仍有一部分人在坚持数学研究工作，尤其是昆明的西南联合大学与贵州的浙江大学，学术空气更浓．这时的研究工作要求有自己独立的原始思想，要求有坚韧不拔的持久精神，才能在不依赖于图书杂志的情况下进行研究工作．抗日战争胜利后，接着是三年多内战．直到中华人民共和国建立，才逢到发展中国科学与教育的第二个好时期．

从 1949 到 1966 年的十七年，是中国数学走向独立与成熟的形成时期．这十七年比历史上任何时候更活跃．这十七年约有 450 位数学家发表了 1800 篇学术论文．而 1949 年前只有 74 位数学家发表了 342 篇论文．在这十七年中，1957 年前发展的更好一些．“反右运动”及“大跃进”后，左倾思潮对数学研究不断有冲击，表现在只承认数学发展的外部动力，而不承认数学的内部矛盾也是数学发展的推动力．对所谓“理论联系实际”的原则作实用主义的片面解释，以致数学的正常发展遭到损伤．但总的说来，取得的成绩仍很可观．中国在数论，拓扑学，函数论，经典几何学，代数，计算数学，数理逻辑，微分方程，泛函分析，概率统计，控制理论与运筹学等均取得了可喜的成绩．中国的“数学学报”被美国数学会全文译成英文发表．华罗庚，吴文俊，冯康，陈景润被国际数学大会邀请作报告．

这一较好的发展势头，在“文化大革命”开始即告终结．数学研究全被中断，数学杂志被迫全部停刊．但仍有很少数人在私下坚持数学研究工作．

1976 年，“文化大革命”结束，特别是中国执行改革开放政策的十多年来，给中国的数学发展带来了好机会．由于广泛的国内外学术交流，中国数学家的眼界大为开阔了．中外数学家间的密切联系使原来数学研究力量较薄弱的地区与学校，也开始在数学研究上有了长足的进步．目前每年在国内外著名杂志上发表的论文数量已

达六百篇以上．十多年来在国外出版的中国数学家的书籍也愈来愈多了，这标志着数学的研究工作已趋于系统与深入．但由于数学研究的人力与财力的投入仍较低，知识分子的收入更偏低一些，以致优秀的年轻数学人才外流．社会的各种不正之风在数学家中也有所反映，这将直接影响到数学的研究质量．这些问题若不妥善解决，则可能会对中国的数学发展产生损失，应加以解决．

关于近现代中国数学史的研究，过去可以说是一个缺门，仅近年来刚刚开始起步．现在连起码的准确的统计资料还没有，例如每年全国数学家在国内外著名杂志上发表的论文总数及数学家人数到底是多少？更不用说作进一步的分析了．中国科学技术协会组织编写“中国科学技术专家传略”提供了这样一个机会，促进这项研究工作的开展．我们必须将撰写科技专家的传略作为一项近现代科学史的科研项目来做．应该实事求是，内容翔实可靠，通过撰写有成就的数学家的传略弄清中国近现代数学发展的情况，用他们的学术成就，爱国主义精神与艰苦奋斗的作风来鼓舞年轻一代数学家，将我国的数学事业推上一个新的台阶．

在编写的过程中，考虑到中青年数学家正处于事业之鼎盛时期，以后还有更大的成就，可待以后再写传，所以入传者的年龄均偏大一些．又有一部分数学家，由于一时难找撰稿人，只好待各方面条件更具备时再入传．居于港、澳、台的数学家与华裔外籍数学家，由于不易搜集材料亦暂不入传，好在这本传略还要不断补充完善的．

考虑到撰写传略是一项科学研究工作，所以除我本人之外，其他编委均是从事中国近现代数学史的研究工作的．本书的编辑工作亦是他们承担的．由于中国近现代数学史的研究工作起步不久，水平不高，本书中不妥甚至错误之处在所难免，盼读者不吝指教．

《中国数学会史料》序*

在我国改革开放逐步深入发展的形势下，我们迎来了中国数学家之家“中国数学会”（简称数学会）成立六十周年.

数学是炎黄子孙擅长的学科. 从公元前 3 世纪到 14 世纪，中国人对数学作出过不少重大贡献，其中有些成就先于阿拉伯、印度与欧洲的同样成果达几个世纪. 但从 14 世纪起，中国数学就相当停滞，直到 17 世纪，一些传教士才将西方的科学与数学传入中国，紧随着有一个较活跃的发展，但仍脱离西方数学发展的主流.

中国现代数学的研究与教学是由一些早期留学欧、美及日本的留学生将现代数学知识带回中国的，他们培养学生，逐步在中国进行开拓，生根发芽，开花结果. 截至 1920 年，获得数学博士学位者只有胡明复与姜立夫，至 1930 年，也只有陈建功、江泽涵、杨武之、孙光远等十余人. 所以中国现代数学研究是 30 年代才真正开始的.

辛亥革命后，北方的“京师大学堂”于 1912 年改为“北京大学”，并设算学门，有冯祖荀与秦汾在执教，30 年代初，江泽涵、申又枨与陈鹹淮加入后，学术水准有大提高. 初建于 1911 年的“清华学校”是一所留美预备学校，1926 年改制“清华大学”，学

---

* 这是为任南衡、张友余著《中国数学会史料》所写的序，江苏教育出版社出版，1995.

术上突飞猛进，郑之蕃与熊庆来先后主持了数学系．南开大学数学系是 1920 年姜立夫创办的．南方的“东南大学”数学系创办于 1921 年，最早执教者有熊庆来、何鲁、段调元．“武昌高等师范学堂”自 1921 年陈建功往执教后，方有起色．1929 年与 1931 年陈建功与苏步青先后去“浙江大学”任教，浙大数学系遂成为中国数学研究与教学的中心之一．那时虽然人数寥寥，但以一当百，他们的艰苦创业精神足以永为后人之楷模．

中国数学界在聚积力量，经过反复联络，终于 1935 年 7 月在上海成立中国数学家自己的团体“中国数学会”．数学会下设董事会、理事会与评议会．董事有胡敦复、何鲁、冯祖荀、秦汾与郑之蕃等；理事有熊庆来、孙光远、陈建功、江泽涵与苏步青等；评议员有钱宝琮、胡坤陞、束星北、傅种孙与曾远荣等．数学会决定在中国创办专门的与普及的两种数学杂志．1936 年，数学会第二次年会在北平举行，专门的数学杂志《中国数学会学报》（简称学报）与普及性的《数学杂志》陆续创刊，它们分别以苏步青与顾澄为总编辑，二十五岁的华罗庚担任学报助理编辑．

数学会的成立与学报的出版是中国数学开始走向独立与成熟的里程碑．

1937年，“七七事变”，日本侵略军大举侵入中国，大片国土沦陷在日本军铁蹄之下．刚开始两年的数学会被迫停止了活动．1940 年，在四川、云南、贵州等地的数学家又组织起自己的团体“新中国数学会”以区别于原来的中国数学会，以姜立夫为会长，熊庆来、陈建功、苏步青、孙光远、江泽涵、杨武之、华罗庚（兼司库）与陈省身（兼文书）为理事．他们在十分困难的经济条件下组织过一些学术活动，直到 1947 年与 1948 年，他们还活动过．

中国数学会真正的大发展还是中华人民共和国成立之后的事．从 1949 年 7 月起，即开始筹备酝酿，1951 年 8 月 15 日至 20 日在

北京大学召开了规模空前的中国数学会第一次代表大会，到会代表63人．开会时，《数学学报》已经出版，第一期《数学杂志》在编排中．大会选举了理事21人，候补理事7人．以华罗庚、江泽涵、陈建功、曾昭安、吴大任、傅种孙、关肇直、段学复与王寿仁为常务理事．华罗庚为理事长，王寿仁实际上担当起秘书长职务．

1951年至1956年是数学会的一个黄金时代，无论在组织学术交流，出版发行数学杂志与丛书，数学教学改革与数学普及活动，都领导全国数学家做了大量工作．1956年8月13日至19日在北京大学举行了规模空前的数学论文宣读大会，参加者约一百多人，宣读论文一百七十多篇，其中建国后大学毕业者的论文占半数以上．这是又一块里程碑，标志着中国数学已经开始走向世界，具有一定的成熟与实力．

1957年"反右运动"至1966年这十年间，除1961年后的两、三年外，"左"的政策贯穿着各方面，数学会当然不能例外．这个阶段，数学会诸领导人的文章与讲话当然也带上了"左"的烙印．我们要历史地看问题，这是整个大环境在数学活动中的反映．我们不能用现在的眼光来衡量当时数学会诸领导人的言行．他们在这个阶段的工作是异常困难的，应予充分肯定．

"文化大革命"十年浩劫，中华民族蒙受了巨大的苦难．数学会停止了活动，留下了十年的空白．

"文化大革命"结束后，中国的数学与数学会迎来了美好的春天，走上了大发展的坦途，其活动规模比"反右运动"前也大大地超过了．这是有目共睹的事实，在此就不赘述了．

随着改革开放的深入，过去不涉足的中国现代数学史研究也开始了．这是一件好事．历史是一面镜子．从研究历史中，既能看到过去的得失，又能预见今后的发展道路．数学史是每一个数学家都要研究的学问．目前我国已经出版了一些关于中国现代数学家传略

与中国现代数学史略方面的书籍．数学会的历史无疑是中国现代数学史重要的一章，理应加以研究．陕西师范大学教授张友余长期注意收集数学会的历史资料，她与多年在数学会工作的任南衡教授合作，收集与考证了数学会各个时期的文献资料，集成书出版．这对中国现代数学史的研究无疑是很有帮助的．当然也应该指出，中国现代数学史研究才刚开始起步，需要我们加倍努力，使研究向更深层次发展．

不少中国现代数学的创始人与前辈都健在，我作为一个晚辈，根本没有资格为本书写序．但另一方面，我也愿意借写序的机会表示一下我对中国现代数学史研究的支持．

六十年来，中国经历了两次战争，十年“左”的干扰，十年“文化大革命”浩劫，但中国数学仍然顽强地向前发展了，这表示了中国数学家将中国数学推向世界水平的不可动摇的信心．现在虽然还有不少困难，但我们应该相信，随着改革开放的深入，中国数学必定会更快地发展起来，让我们百倍努力，迎接中国作为世界数学强国的日子到来吧！

数学竞赛之我见*

一　数学竞赛的简史

数学竞赛与体育竞赛相类似，它是青少年的一种智力竞赛，所以原苏联人首创了“数学奥林匹克”这个名词．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛中，数学竞赛历史最悠久，参赛国最多，影响也最大．比较正规的数学竞赛是1894年在匈牙利开始的，除因两次世界大战及1956年事件而停止了7届外，迄今已举行过90届．原苏联的数学竞赛开始于1934年，美国的数学竞赛则是1938年开始的．这两个国家除第二次世界大战期间各停止了3年外，均已举行过50多届．其他有长久数学竞赛历史的国家是罗马尼亚（始于1902年）、保加利亚（始于1949年）和中国（始于1956年）．

1956年，东欧国家和原苏联正式确定了国际数学奥林匹克的计划，并于1959年在罗马尼亚布拉索夫举行了第一届国际数学奥林匹克（International Mathematics Olympiad，简称IMO）．以后每年举行一次．除1980年因东道国蒙古经济困难停办外，至今共举行过31届，参赛国家也愈来愈多．第一届仅7个国家参加，至1980年已有23个，到1990年，则有54个．

必须说明在上述历史之前已有一些数学竞赛活动．例如原苏联

---

* 原载《自然杂志》13:12，1991，787～790．

人说，在 1886 年帝俄时代就举行过数学竞赛．又如 1926 年在中国上海市举办过包括学生、银行和钱庄职员在内的珠算比赛，中华职业学校一年级学生，16 岁的华罗庚凭智慧夺得了冠军．这些都是关于数学竞赛的佳话，不列入正史．

二 数学竞赛的发展

数学竞赛活动是由个别城市，向整个国家，再向全世界逐步发展起来的，例如原苏联的数学竞赛就是先从原列宁格勒和莫斯科开始，至 1962 年拓展至全国的．美国则是到 1957 年才有全国性的数学竞赛的．

数学竞赛活动也是由浅入深逐步发展的．几乎每个国家的数学竞赛活动都是先由一些著名数学家出面提倡组织，试题与中学课本中的习题很接近；然后逐渐深入，并有一些数学家花比较多的精力从事选题及竞赛组织工作，这时的试题逐渐脱离中学课本范围，当然仍要求用初等数学语言陈述试题并可以用初等数学方法求解．例如原苏联数学竞赛之初，著名数学家柯尔莫哥洛夫、亚历山大洛夫、狄隆涅等都参与过这一工作，在美国，则有著名数学家伯克霍夫父子、波利亚、卡普兰斯基等参与过这项工作．

国际数学奥林匹克开始举办后，参赛各国的备赛工作往往主要是对选手进行一次强化培训，以拓广他们的知识，提高他们的解题能力．这种培训课程是很难的，比中学数学深了很多．这时就需要少数数学家专门从事这项活动．

数学竞赛搞得好的国家，竞赛活动往往采取层层竞赛、层层选拔这种金字塔式的方式进行．例如，原苏联分五级竞赛，即校级、市级、省级、加盟共和国级和全苏竞赛，每一级的竞赛人数约为前一级的 1/10，还设立了 8 个专门的数学学校（或数学奥林匹克学校），以培养数学素质好的学生．

数学竞赛虽然历史悠久，但最近10年有很大发展和变化，有关工作愈趋专门．我们要认真注意其发展，认识其规律．

三　数学竞赛的作用

1．选拔出有数学才能的青少年．由于数学竞赛是在层层竞赛，水平逐步加深的考核基础上选拔出优胜者，优胜者既要有踏实广泛的数学基础，又要有灵活机智的头脑和富于创造性的才能，所以他们往往是既刻苦努力又很聪明的青少年．这些人将来成才的概率是很大的．数学竞赛活动受到愈来愈多国家的注意，在世界上发展得那么快的重要原因之一就在于此．在匈牙利，著名数学家费叶、黎茨、舍贵、寇尼希、哈尔、拉多等都曾是数学竞赛的优胜者．在波兰，著名数论专家辛哲尔是一位数学竞赛优胜者．在美国，数学竞赛优胜者中后来成为菲尔兹数学奖获得者的有米尔诺、曼福德、奎伦三人．也有不少优胜者成为著名的物理学家或工程师，如著名力学家冯·卡门．

2．激发了青少年学习数学的兴趣．数学在一切自然科学、社会科学和现代化管理等方面都愈来愈显得重要和必不可少．由于电子计算机的发展，各门科学更趋于深入和成熟，由定性研究进入定量研究．因此青少年学好数学对于他们将来学好一切科学，几乎都是必要的．数学竞赛将健康的竞争机制引进青少年的数学学习中，将激发他们的上进心，激发他们的创造性思维．由于数学竞赛是分级地金字塔式地进行的，所以国家级竞赛之前的竞赛，试题基本上不脱离中学数学课本范围，适合广大青少年参加．但也要承认人的天赋和数学素质是有差别的，甚至会有很大的差别，国家级竞赛及其以后的竞赛和培训，只能在少数人中拔高进行，少数有很好数学素质的青少年是吃得消的．例如，澳大利亚少年托里·陶在他10岁、11岁和12岁时分别在第27、28和29届国际数学奥林匹克上

获得铜牌、银牌和金牌．在数学竞赛的拔高阶段当然需要一些大学老师和数学专业研究人员参与．

3．推动了数学的教学改革工作．数学竞赛进入高层次后，试题内容往往是高等数学的初等化．这不仅给中学数学添入了新鲜内容，而且有可能在逐步积累的过程中，促使中学数学教学在一个新的基础上进行反思，由量变转入质变．中学教师也可在参与数学竞赛活动的过程中，学得新知识，提高水平，开阔眼界．事实上，已有一些数学教学工作者在这项活动中逐渐尝到了甜头．因此数学竞赛也可能是中学数学课程改革的“催化剂”之一，似乎比自上而下的“灌输式”的办法为好．60 年代初，西方所谓中学数学教学现代化运动即是企图用某些现代数学代替陈旧的中学数学内容，但采取了由上往下灌输的方法，结果既脱离教师水平，也脱离学生循序学习所需要的直观思维过程．现在基本上被一风吹，宣告失败了，相反地，数学竞赛也许是一条途径．在中国，中学生的高考压力很重，中学教师为此而奔波，确有路子愈走愈窄之感，数学竞赛或许能使中学数学的教学改革走向康庄大道．

四 竞赛数学——奥林匹克数学

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学，也可称为奥林匹克数学．将高等数学下放到初等数学中去，用初等数学的语言来表述高等数学的问题，并用初等数学方法来解决这些问题，这就是竞赛数学的任务．这里的问题甚至解法的背景往往来源于某些高等数学．数学就其方法而言，大体上可以分成分析与代数，即连续数学与离散数学．由于目前微积分不属于国际数学奥林匹克的范围，所以下放离散数学就是竞赛数学的主体．很多国际数学奥林匹克的试题来自数论、组合分析、近世代数、组合几何、函数方程等．当然也包含中学课程中的平面几何．

竞赛数学又不同于上述这些数学领域．通常数学往往追求证明一些概括广泛的定理，而竞赛数学恰恰寻求一些特殊的问题．通常数学追求建立一般的理论和方法，而竞赛数学则追求用特殊方法来解决特殊问题；而且一旦某个问题面世，即成为陈题，又需继续创造新的问题．竞赛数学属于“硬”数学范畴，它通常也与纯粹数学一样，以其内在美，包括问题的简练和解法的巧妙，作为衡量其价值的重要标准．

竞赛数学不能脱离现有数学分支而独立发展，否则就成了无源之水，所以它往往由某些领域的专家兼搞，如参加国际数学奥林匹克的中国代表团的出色教练单墫，就是一位数论专家．

国际数学奥林匹克的精神是鼓励用巧妙的初等数学方法来解题，但并不排斥高等数学方法和定理的使用．例如在这次第 31 届国际数学奥林匹克中，有学生在解题时用到了贝特朗假设，也称车比雪夫定理，即当 n 大于 1 时，在 n 和 $2n$ 之间必定有一个素数．还有人在解题时用到了谢尔宾斯基定理，即一个平方数表成 s 个平方数之和的通解形式．这些定理须在华罗庚所著的《数论导引》（大学数学系研究生教本）或更专门的书中才能找到，这样不仅已是“杀鸡用牛刀”，而且按某外国教练的说法，“他们在用原子弹炸蚊子，但蚊子被炸死了！”这样做是允许的，但不是国际数学奥林匹克所鼓励的．

国际数学奥林匹克的一个难试题，经简化后的证明要写三四页，这不仅大大超过中学课本的深度，也不低于大学数学系一般课程的深度，当然不包括大学课程的广度．实际上，大学数学系课程中，一条定理的证明长达 3 页者并不多．一个好试题的解答，大体上相当于一篇有趣的短论文，因此用这些问题来考核青少年的数学素质是相当科学的．它们的解决需要参赛者有相当宽广的数学基础知识，再加上机智和创造性．这与单纯的智力小测验完全不同．国

际上的数学竞赛范围，大体上从小学四年级到大学二年级．小学生因基础知识太少，这期间的所谓数学竞赛，其实是智力小测验型．对大学生应强调系统学习，要求对数学有一个整体了解．因此数学竞赛的重点应是中学，特别是高中．

现在已经积累了丰富的数学竞赛题库，可供中学师生和数学爱好者练习．国际上也已经有了竞赛数学的专门杂志．

五 数学竞赛在中国

我国的数学竞赛始于 1956 年，当时举办了北京、上海、武汉、天津四城市的高中数学竞赛．华罗庚、苏步青、江泽涵等最有威望的数学家都积极出面领导并参与这项工作．但由于“左”的冲击，至 1965 年，只零零星星地举行过 6 届．“文化大革命”开始后，数学竞赛更被看成是“封、资、修”的一套而被迫全部取消．直到“四人帮”被打倒，我国的数学竞赛活动于 1978 年又重新开始，并从此走上了迅速发展的康庄大道．1980 年前的数学竞赛属于初级阶段，即试题不脱离中学课本．1980 年以后，逐渐进入高级阶段．我国于 1985 年第一次参加国际数学奥林匹克，1986 年开始名列前茅，1989 和 1990 年连续两年获得团体总分第一．

今年我国成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国的数学竞赛水平已达到国际领先水平．第一，中国再次获得团体总分第一，说明我国金字塔式的各级竞赛和选拔体系及奥林匹克数学学校和集中培训系统是完善的．第二，我国数学家对 35 个国家提供的 100 多个试题，进行了简化与改进，从中推荐出 28 个问题供各国领队挑选，结果被选中 5 题（共需 6 题)、这说明我国竞赛数学的水平是相当高的．第三，各国学生的试卷先由各国领队批改，然后由东道主国家组织协调认可．我们组织了近 50 位数学家任协调员，评分准确、公平，提前半天完成了协调任务，说明我国

的数学有相当的实力．第四，这是首次在亚洲举行国际数学奥林匹克，中国的出色成绩鼓舞了发展中国家，特别是亚洲国家．除此而外，这次竞赛的组织工作也是相当不错的．

在中国，从老一辈数学家，中青年数学家，直至中小学老师，成千上万人的共同努力，才在数学竞赛方面获得了今天的成就．这里特别要提到华罗庚，他除倡导中国的数学竞赛外，还撰写了《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的“神奇妙算”谈起》、《数学归纳法》和《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》5 本小册子，这些是他的竞赛数学作品．我国在 1978 年重新恢复数学竞赛后，他还亲自主持出试题，并为试题解答撰写评论．中国其他优秀竞赛数学作品有段学复的《对称》、闵嗣鹤的《格点和面积》、姜伯驹的《一笔画和邮递路线问题》等．这里还应提到王寿仁，他从跟华罗庚一起工作起，一直到今天，始终领导并参与了数学竞赛活动．他带领中国代表队 3 次出国参加国际数学奥林匹克，并领导了第 31 届国际数学奥林匹克的工作．1980 年以后，我国基本上由中青年数学家接替了老一辈数学家从事的数学竞赛工作，他们积极努力，将中国的数学竞赛水平推向一个新的高度．裘宗沪就是一位突出代表，他从培训学生到组织领导数学竞赛活动，从 3 次带领中国代表队参加国际数学奥林匹克到举办第 31 届国际数学奥林匹克，均作出了杰出贡献．

六　关于我国数学竞赛的几个问题

1．要认真总结经验．既要总结成功的经验，也要总结反面的教训．特别是 1956 年至 1977 年的 22 年中只小规模地举行了 6 次数学竞赛，完全停止了 16 年，比匈牙利因两次世界大战而停止数学竞赛的时间长一倍多，这也从一个侧面反映了“左”的危害．要允许甚至鼓励对数学竞赛发表各种不同看法，以避免大起大落及

“一刀切”. 当有了缺点时，要冷静分析，划清数学竞赛内含的不合理性与工作中的缺点的界线.

2. 完善领导体制. 可否设想，国家教委和中国科协通过中国数学会数学奥林匹克委员会（或其他形式的一元化领导），统一领导与协调全国各级数学竞赛活动和国际数学奥林匹克的参赛和组织培训工作. 成立数学奥林匹克基金会，资助某些数学竞赛活动，奖励数学竞赛优胜者和作出贡献的领导、教练、中小学教师等.

3. 向社会作宣传. 宣传数学竞赛的意义和功能，以消除误解，例如“数学竞赛是中小学生搞搞的智力小测验”，“这是选拔天才，冲击了正常教学”，“教师，特别是大学教师，搞数学竞赛是不务正业”等. 要用事实说明数学竞赛活动的成绩. 例如仅仅“文革”前的几次低层次数学竞赛中，已有一些竞赛优胜者成才了. 如上海的汪嘉冈、陈志华，北京的唐守文、石赫，他们现在已经是国内的著名中年数学家，有的已获博士生导师资格，他们在“文革”中都被耽误了 10 年，否则完全会有更大成就.

4. 处理好普及与提高的关系. 数学竞赛需要分学校、市、省、全国、冬令营、集训班金字塔式地进行. 前 3 个层次是普及型的，试题应不脱离中学数学课本范围，面向广大学生和教师. 国家级竞赛及以后的活动是提高型的，参赛者的面要迅速缩小. 至于冬令营和集训队，全国只能有几十个学生参加. 数学奥林匹克学校要注意质量，宜办得少而精. 对于参加数学学校的学生要严格挑选，不要妨碍他们德、智、体的全面发展. 除冬令营和集训班需要少数数学家集中时间出试题和进行培训工作外，宜鼓励广大数学家和中小学教师利用业余时间从事数学竞赛活动，不要妨碍大家的正常工作. 总之，数学竞赛的普及部分与提高部分不要对立，而要有机地结合起来.

5. 对数学竞赛优胜者要继续进行教育和培养. 一方面要充分

肯定优胜者的成绩并加以鼓励．另一方面也要告诉竞赛优胜者，必须戒骄戒躁，谦虚谨慎，要成为一个好数学家或其他方面的专家，还须经过长期不懈的努力．不要将竞赛获胜看成唯一的目的，要看成鼓励前进的鞭策．还要为数学竞赛优胜者创造较好的深入学习的机会，使他们能迅速成长．例如可以考虑允许某些理工科大学在高中全国数学竞赛优胜者中，自行选拔一部分学生免试入学．

6．对数学竞赛活动作出贡献的人员，包括组织领导者、教练与中小学教师的工作成绩要充分肯定并给予奖励．在他们的工作考核中，作为提职晋级的依据之一．

谈谈数学系的教学与科学研究*

由于数学科学的发展，在一些国家的大学中，某些领域已从数学中分离出来，独立成系，例如应用数学系，统计科学系，计算机科学系（包括科学计算）. 所以数学系往往只包括传统的数学分支. 应用数学与统计学中的问题是有明确的实际应用背景的，而计算机科学是不同程度地依赖于电脑的发展或引导电脑技术的发展. 我们不拟对这些方面展开讨论，本文只限于讨论大学数学系的教学与科学研究问题.

一　加强基础课教学

数学是一个不断发展、内容经常变迁的学问，如何掌握它？我想最要紧的就是有一个踏实坚固的数学基础训练，使学生有一个自学的能力，这样才能适应数学的变化与发展. 大学数学系的教育对学生独立工作能力的开发与培养往往比数学书本知识的传授更重要得多. 有了牢固的数学基础之后，专业知识就可以通过自学来学习. 所以对基础课的学习一定要加强. 大学数学系教学不同于中学之处在于在相当程度上讲，大学应以自学为主，决不要让学生死读书，并仅以考分高低来评论一个学生成绩的好坏. 课程要少而精，让学生多一些自由支配的时间. 大学阶段的时间很有限，怎样来安

---

* 原载《面向二十一世纪的中国数学教育》，江苏教育出版社，1994，41～49.

排课程呢？主要应安排基础课．中学数学是离散、有限与确定的古代数学，而且课程的进度又很慢．学生进入数学系后，在一些课程刚开始就要碰到跟中学课程完全不同的概念，例如分析中的无穷大，无穷小，极限，连续等．大学的抽象代数或近世代数是讨论某些数学结构的共性，如群，环，域等，也不同于中学代数的具体方程求解．中学除平面几何外，都着重计算，大学课程则要用严格的逻辑推导手段来论证一系列定理．因此首先要求大学生对新的数学概念有清楚的认识与了解，善于进行数学逻辑推导，能够判断定理证明过程的对错，这是数学系学生的第一道关．总之，如果概念不清楚，这就是个很大的问题．这样的学生就不宜继续在数学系学习，而应该鼓励他们转到更适宜于他们的科系中去学习．

数学系的基础课主要是两个系列，即连续数学与离散数学．前者包括数学分析，复变函数论，实变函数论，拓扑学等，包括无穷大、无穷小，极限，连续，微积分及其应用，包括局部微分几何学，复围道积分，解析函数理论，测度论，积分论，点集拓扑与代数拓扑初步．后者包括线性代数，抽象代数，其中初等数论可以单独开课，也可以作为抽象代数的背景材料来讲．其他功课，如微分方程，概率论，调和分析及一些专业课则可以作为选修课或在基础课学到一定阶段后，由学生自修．基础课在前两年半至三年来学习，时间应该是够用的．学生的负担不会很重．余下时间可以组织自学让他们自己去图书馆找书，借书，读书．学生自学能力如何，这是第二道关．通过对学生自学能力的考察，可以更明显地分辨出他们数学才能的档次．

除数学基础课外，物理学的基础知识学习也很重要．物理是与数学科学关系最密切的自然科学领域，物理也是其他自然科学领域的基础．在大学阶段就掌握好物理的基础知识，无论对于日后继续钻研纯粹数学或从事应用数学工作都会得益匪浅．对于微电脑应学

会使用.

二 师生共同举办数学讨论班

浙江大学数学系在陈建功与苏步青教授的倡议与指导下，将师生共同举办的数学讨论班作为数学系高年级学生的主要课程. 这是值得推广的经验，通过讨论班来培养学生独立学习与工作的能力及对于发现有攻坚才能与创造性强的学生，都是一个很好的方法. 浙大数学讨论班分甲种与乙种，甲种讨论班由老师给每个学生指定一篇数学论文，乙种讨论班由老师给每个学生指定一本数学书，交给学生自己去阅读，然后由学生轮流上讲台作报告，老师听讲并提问，每个学生每学期要讲四、五次. 这样的学习方式比老师讲课，学生听课记笔记，做习题，当然是高了一个层次. 学生开始由“被动”地学习走向“主动”地学习. 这是有指导的自学，在这个阶段中，学生间的能力的差距就拉开了，这也是一个数学系大学生由学习走向独立地从事研究工作的过渡阶段.

三 强调自学与交流

大学的时间只有四年，大学毕业后，继续工作的时间至少也有三十年左右，相比之下，在大学学习的时间是很短暂的. 毕业后的进修与提高主要靠自学来进行. 因此在大学阶段养成自学的习惯就非常重要. 大学课程的教授方法应不同于中学，讲课方式更要尽量避免填鸭式，即将数学逻辑推导一步步交待清楚就算了事，应尽量采取启发式教学. 华罗庚教授的讲课就是一个很好的范例，他常常将高年级的课程联系到低年级的课程内容，甚至中学课程来讲授，他更注意各门课之间的相互联系，使学生对数学有一个整体了解. 华罗庚教授倡导的“一条龙”教学法就是将基础课放在一起教，不像传统地分门教授. 总之，课程门类要少一点，内容要精简一点，

使学生有较充裕的时间进行自学与独立思考．前面讲的师生数学讨论班就是有指导地让学生进行自学．大学生要养成多进图书馆，自己学会找书与杂志看的习惯．有时到图书馆的书架上拿出书来随便浏览就很有好处，即所谓开卷有益．有时一个初步印像，在以后做研究时，就会由于这个印象而知道到那里去找参考资料．还应该经常去听听各种学术报告，一次，二次听不懂没有关系，多听听就会懂得多起来了．一个数学家的知识面与工作面变得较宽，除自己读书外，主要还是来自到图书馆浏览，听报告及跟数学家经常交谈中得到的．

四　培养学生独立地进行研究工作

数学系学生在大学阶段还是应以学习基础课为主，那种不好好学习基础课，一天到晚钻一个数学问题，特别是一个经典问题，如费马问题，哥德巴赫问题，似乎是不可取的．这种问题的研究特别需要很广阔与坚实的数学基础，而且需要对前人的研究有所了解．

数学系学生在完成大学阶段的学习后，无论是进入研究所继续做研究生，还是留在大学或专科学校做研究生或教书，都要在导师指导下或自己独立地找一个研究方向，在导师指导下或独立地进行数学研究工作．如果大学阶段接受启发式的教学，并经过师生数学讨论班的训练，学生就应该具备自己作出研究方向判断的能力，要在有经验的教授指导下，根据自己的兴趣，选择基础性强，且跟很多数学分支有联系，又很活跃的数学分支与前沿课题作为研究方向．数学分支大体上似乎可以分成四种情况．第一是完全成熟，即它不再继续发展，或已可以判断继续发展的价值不大，再出现重大成果的机会很微小．第二是基本上成熟的领域，即学科的框架已建立，但还有些未解决的问题待研究．第三是正在走向成熟的领域，这种学科的框架已基本建立，还需继续完善，尚待解决的问题还不

少．第四是正在发展的领域，学科框架尚未建立．第一类学科不应选作研究方向．这里我想引用一位著名物理学家的话："如果一个领域本身不能发展，你就有天大的本事也没有用．"如果选择了第二、三类学科为研究方向，当然可以学会一些深刻的结果与方法，以此为依托，可能作些改进与推广性质的工作．但由于学科已相当成熟，不易独辟蹊径．第四类学科由于不成熟，未定型，虽然活动空间大，但也可能无从下手．要注意现代数学领域的名目繁多，有人喜欢标新立异，有不少东西经一个时期的发展后可能仍然很空，缺乏生命力．当了解到这一情况后，就应立即转移研究方向．当一个人从事纯粹数学研究到一定阶段后可以向应用数学方面转．应用数学是近几十年来才大量发展起来的学问，很宽广，大有用武之地．纯粹数学出身的人从事应用数学研究，既有有利的一面，即数学逻辑推导的思维与能力比应用数学出身的人会强一些．但也有不利的一面，即往往在研究工作中对应用数学问题的背景认识不够，工作中缺乏对实际应用的可能性的考虑，从而将应用数学研究完全当成纯粹数学研究．这是要克服的倾向．

五　注意研究方法

华罗庚教授对数学学习方法与研究方法有一系列精辟的论述，可以参看他的著作《华罗庚科普著作选集》（上海教育出版社，1984），在这里就不赘述了．简要地说，他认为做研究应抓住"专"与"漫"两个字．"专"字比较容易理解，要求我们对专业要钻得深，研究工作要深入．但钻到牛角尖里去也不行，这样钻了进去出不来了，会丧失整个时间的．所以要扩大自己的数学研究领域．但怎样去扩大呢？是抛掉原来的专业去另搞一套吗？人的精力有限，这样做并不是一条有效的途径．所谓"漫"，即从自己的专业出发，向周围的数学领域进行渗透，就是要尽量利用掌握原来数学领域这

样一个优势来进行工作．这样做往往较快见效，还可能起到高屋建瓴，事半功倍之效．有时还可以用原专业的方法解决新领域的问题，起到他山之石，可以攻玉的功效．华罗庚教授还注意到先从具体例子入手，将特例做透后进而推广以建立一般结果的方法．这些都是值得借鉴的．

六　大学教师要进修与做研究工作

作为一个大学数学教师，首先要有较宽广与坚实的数学基础，即所有数学系的基础课都要能够开．在这方面，美国的一些大学的制度是值得借鉴的．他们要求教授每学期开一门基础课，一门研究生专业课．基础课是轮流教各门课，这样教一、二遍之后，自然就对数学基础有了更全面的了解与更深刻的体会了．他们教授的专业课往往也是结合自己的研究，通过教学使对一门数学有更系统与清晰的理解，从中也可以发现有培养前途的青年数学家．总之，这样做可以起到教学相长之功，既对学生有益，对教师本身也是培养．大学教师一定要抓紧进修，最好的进修方式是做研究工作．不做研究工作的大学教师不是一个合格的教师，最多不过是一个仅仅只会传授书本知识的人而已．不做研究工作，就很难对教材的重点有所了解，更不用说将重要的最新成就纳入到教材中去．美国一些大学数学系的老师每周只要教六节课，又不要坐班，如果只是照本宣科地教教书，岂不太轻松了吗？那么多空余时间交给教师自己来安排，干什么呢？就是让他们做研究工作．我想再次重申，只有通过研究工作，才能对数学的了解不断深化．只有通过研究工作，才有可能将最新科研成果教给学生．当然整天想问题，一点书不念也不行．应该在做研究工作的同时，根据需要去念书，这样由于念书的针对性与目的性明确，念书的劲头与深度都比仅仅为了学习知识而念书要好很多．那种把大学仅仅看成培养学生的中心而不强调科研

工作是不对的．一个高水平的大学必须担当起科学研究与教学双重任务，大学应该办成既是研究工作的中心，又是培养人才的基地．

我的大学阶段是在浙江大学数学系渡过的，接受了陈建功与苏步青教授的数学教育体系的教导．毕业后，由国家统一分配来中国科学院数学研究所工作，师承华罗庚教授，在他领导下，从事数论及其应用的研究，其中我在中国科学技术大学工作了八年，教过基础课与专业课．我在本文中所发表的意见，在很大程度上都是自己学习与工作的经验体会．实际上，在考虑问题时，要脱离这种个人经验是不可能的，所以片面性甚至错误就在所难免了．写出来只是供作交流之用，不当之处，还望读者指教．

在中国数学会第五届理事会第一次会议上的工作报告*

各位理事、各位同志：

本届理事会及其常务理事会是 1987 年至 1988 年春，通过会员代表及上届理事用通讯选举的方式产生的. 当时没有召开全国会员代表大会及全体理事会，这样做主要是由于中国数学会财力有限，物价昂贵，另外也是为了减少大范围的会议，讲求实效. 这件事本身就是对我会工作的一次改革. 实践证明，这次换届选举是比较好的，大家对选举结果比较满意. 特别是本届理事会进一步实现了年轻化，这对推动学会的改革，增强学会工作的活力都是十分重要的.

本届常务理事会已经工作一年多了，常务理事会采取集体领导形式，一切重大问题都经过常务理事会（或在京常务理事会，在京正副理事长、秘书长会）集体讨论决定，交由负责日常工作及有关同志执行. 会议的决定都在《中国数学会通讯》上公布，通告全体会员知道. 现在我向各位理事扼要汇报一下这一年多来的几项主要工作，以及今后工作的打算，请大家审议.

---

* 原载《中国数学会通讯》，2，1989，2～5.

一 一年多来的工作

1. 调整与健全各工作委员会.

常务理事会根据工作的需要，对各工作委员会重新作了调整，我们希望尽量把真正在数学科研与教育第一线工作，年富力强，而又热心于学会工作的同志吸收到各工作委员会中，以利于学会工作的开展. 经过协商，各工作委员会的主任是常务理事会决定的，而各工作委员会成员，则由负责人提名，经常务理事会批准的. 各工作委员会的负责人如下：学术交流工作委员会主任萧树铁，教育工作委员会主任严士健，出版工作委员会主任吴方，国际交流工作委员会主任石钟慈，普及工作委员会主任裘宗沪，组织工作委员会主任成平，数学名词审定委员会主任田方增，学会办公室主任任南衡. 这里的组织工作委员会是本届理事会新设立的一个工作机构，这主要考虑到学会改革，关于组织建设有大量细致的工作要做，增加这样一个委员会专门负责这项工作是很有必要的.

除上述工作委员会外，常务理事会通过了第一届亚洲数学家大会中国组织委员会名单，该委员会将直接对亚洲数学家大会组织委员会负责，承担他们委托的任务. 在京正副理事长、秘书长会议根据协商并经陈省身教授认可，确认并聘请了新的“陈省身数学奖”评奖委员会委员. 这一委员会将根据“陈省身数学奖条例”开展陈省身数学奖的评选工作. 另外还设立了“中国数学会国际数学奥林匹克委员会”，这个组织直接受中国科学技术协会与国家教育委员会的领导，并对他们负责，是一个挂靠在中国数学会中的机构，严士健与裘宗沪理事代表中国数学会参加该委员会的工作.

2. 开展国内外学术交流.

召开学术会议，开展学术交流，是我会的主要工作之一. 1988年召开的国内学术会议有11次，国际学术会议有2次，参加人数

为 1307 人，交流学术论文 1134 篇.

总的来说，1988 年召开的学术会议还比较好，报告了研究成果，交流了学术思想，沟通了信息．特别注意了为国民经济建设服务，理论与实践相结合的数学方向与课题．但也有一些值得注意之处，某些会议学科内容偏窄，或会议过于频繁，相互交叉重复，或准备不足，论文质量不够高．另有一些学科，则长期不召开学术会议，交流不够活跃，显得缺乏活力，这些问题要在今后注意克服.

为了促进亚洲地区数学界的学术交流，“第一届国际代数结构与数论学术会议”于 1988 年 8 月在香港召开，我国约有四十位数学家出席了这次会议，除广泛报告了学术成果与进行了学术交流外，还与台湾、香港地区的数学家及该地区数学会的领导进行了很多有益的接触和探讨，加深了海峡两岸学者的感情，大家切盼海峡两岸的学术交流能日益昌盛.

在国际代数结构与数论会议期间，召开了有十一个国家与地区数学会代表参加的将于 1990 年 8 月在香港召开的“第一届亚洲数学家大会”筹备会议，我国有五位数学家参加了这次筹备会．根据目前了解，亚洲各国与地区均将派出他们最突出的数学家参加会议．中国数学会负责大会的分析组工作．开好这次会议是很重要的，这将标志着亚洲地区的数学已进入国际数坛．中国的组织委员会已经成立，负责审定中国出席会议的代表资格．筹备好这次国际会议将是我们 1988 至 1989 年的一项重要工作，需要大家共同关心与支持.

常务理事会对 1988 年 8 月召开的，由中科院数学所与中国科技大学联合主办的“纪念华罗庚国际数论与分析会议”给予了支持.

3．办好各数学期刊与《中国数学会通讯》.

数学期刊的编辑出版工作是数学会的重要工作之一．我会主办

的学术期刊是中国在国内外最有影响的数学杂志之一. 1988 年我会好几个刊物召开过编委会，讨论了办刊方针，调整了编委会.

4."陈省身数学奖"评奖工作.

由香港亿利达工业发展集团有限公司总裁刘永龄先生提供捐助而设立的"陈省身数学奖"，委托数学会常务理事会组织评选委员会进行评选. 首届的评奖和颁奖工作是成功的，此奖起到了鼓励中青年数学工作者努力攀登数学高峰的作用. 1988 年评选出 1987 年和 1988 年度的两位得奖人：中国科学院系统科学所研究员李邦河和北京大学数学系教授姜伯驹，名单送交陈省身教授审阅同意，1989 年秋将在北京召开发奖大会进行颁奖.

5. 数学普及工作.

我会的数学普及工作主要是面向青少年的工作，通过普及工作委员会和全国各省、自治区、直辖市数学会的共同努力，积极开展各种活动，取得了较大的成绩.

每年举办的中学生数学竞赛，分初、高中先后举行，这项有意义的中学生课外活动，受到广大师生和教育部门的欢迎，对于提高中学数学教学水平起到了积极作用. 高中竞赛的优胜者参加了在上海复旦大学举行的第三届全国中学生数学冬令营，通过考试选拔了 20 名学生组成集训班，最后再从中选出 6 名队员，组成代表队出国参赛，1988 年在澳大利亚举行的国际数学奥林匹克竞赛中获得团体总分第二名，为我国争得了荣誉.

1989 年 1 月，我会与中国科技大学及《中学生数理化》杂志在合肥联合举办了第四届全国中学生冬令营，选出了 22 名学生组成集训班进行紧张培训，他们将迎接今年 7 月在西德举行的第 30 届国际数学奥林匹克竞赛.

由我会和中国优选法、统筹法与经济数学研究会、中国科协青少年部、中国少年报社、中央电视台等联合举办的"第二届华罗庚

金杯少年数学邀请赛”，在 1988 年 12 月举行了初赛，共有近二百三十万小学生和初中一年级学生参加初赛，经各市举行复赛后，二月下旬在深圳进行了决赛并举行了发奖大会.

普及工作除面向青少年学生的数学竞赛工作外，还有很多其它工作，如果人力、财力允许，还应做其它方面的普及工作．另外，在数学竞赛活动中不宜过份强调优胜名次，不要搞层层选拔，亦应减少专门培训，切不可加重师生负担，干扰正常教学秩序.

二　在改革中开拓前进

中国数学会是一个有五十多年历史的重要学会，是国家在数学领域的高级智力集团，是汇集优秀数学人才的宝库．充分发挥中国数学会在国家科技进步、经济振兴和社会发展中的重要作用，在国际上要能与诸多数学先进国家的数学会立于平等地位，这是数学会改革的重要目标.

中国数学会在解放后经历了一个曲折的发展过程．解放后至 1957 年，是一个迅速发展的时期，1957 年至 1966 年受到“左”的路线和政策冲击，使学会逐步萎缩．“文革”十年浩劫迫使数学会停止了一切活动.

粉碎“四人帮”后，特别是在党的十一届三中全会以来，我会又迅速得到恢复与发展，在促进我国数学发展及其本身的组织建设、民主办会等方面都做了大量工作，取得了成绩，这是有目共睹的．从 1986 年以来，由于社会上对知识、知识分子的不重视，物价高涨，通货膨涨，体脑分配倒挂，社会不良风气的影响等等，数学会的工作又日趋困难，这就需要我们能适应新的形势，团结广大数学工作者，改善我们的工作，使我们能在改革中继续前进，为发展我国的数学事业作出应有的贡献.

中国数学会是中国科学技术协会所属的群众团体之一，它的改

革必须与中国科协的改革同步进行. 前不久中国科协三届四次全委会已通过“中国科协改革的基本设想”，我们要以这个文件为指针，根据我会的实际情况，作出适合数学会的改革方案. 上月我会专门召开了一次组织工作座谈会，李忠同志将就有关加强我会组织建设、换发会员证及收缴会员会费等问题，向大家进行解释与说明. 下面我想就改革与今后的工作谈几点个人意见：

1. 明确中国数学会的主要任务是促进发展中国的数学事业，所以始终要把进行学术交流，提高我国的数学水平作为中心任务来抓. 我会要更有效，更高水平地召开学术会议与开展学术交流活动，要与数学刊物的挂靠单位共同努力办好我会的学术刊物. 由于物价上涨，经费紧张，会议开支不断增大，使学术会议与交流日趋艰难，出版刊物更是赔钱. 如何继续使刊物办下去，需认真讨论，是否尽量增加英文版的比重都是值得讨论的. 在适当时候，我们考虑召开一次出版工作会议加以研究.

1990 年将在香港召开的第一届亚洲数学家大会，中国将有约 60 位数学家参加，如何更有效地组织好这样大型的学术活动，需请大家共同关心与支持. 1990 年还将在日本京都召开国际数学家大会，我会亦要积极准备参加这一活动.

2. 教育工作是全社会关心的最重大的问题之一，在基础教育中，数学是最重要的课目. 我们要关心数学的教学改革，使之适应现代科技发展的要求. 钱学森教授最近给杨乐教授的信，特别提到数学教改问题，我们已在“通讯”上发表，以引起广泛注意. 我们考虑在适当时候，召开一些座谈会来交流看法.

3. 1990 年将在北京举行第 31 届国际数学奥林匹克竞赛，这项工作由中国科协与国家教委负责领导，中国数学会要组织力量，尽量为这一活动作出应有的贡献.

4. 中国数学会作为一个群众组织，必须逐步开辟经费来源，

增强自筹经费的能力. 这是由于完全靠国家拨款, 就不能称其为群众组织. 若完全靠挂靠单位的经济资助, 就有可能成为挂靠单位的附属单位. 因此征收个人会费与团体会费这也是大势所趋, 这样还可以改变目前会员与非会员之间没有明确区别, 会员与非会员的权利与义务没有任何形式的实际体现, 这样下去数学会对会员就不会有凝聚力. 关于这个问题我就不详谈了.

5. 加强组织建设与民主办会. “中国科协改革的基本设想”指出“理事会规模不宜过大, 要增加中青年理事的比例, 加快理事更新, 理事长任期一届, 一般不连选连任”. 数学会规定理事不得连任两届, 新当选理事不得超过 60 岁, 而且本届理事会人数比上届有所减少, 这些都是符合“设想”精神的, 在科协的各学会中是走在前面的. 今后我们要更好地发挥理事会特别是常务理事会的作用. 建议理事长只主持一届理事会的工作, 不连选连任.

同志们, 这次理事会我们将举行一系列学术报告, 还将举行小组座谈、大组发言, 充分听取理事们对中国数学会改革的意见, 听取对今后工作的建议与对过去工作的评议, 还将召开一些专题的会议. 众所周知, 我们现在的困难是很多的, 但我们相信只要大家群策群力, 团结奋斗, 我们定能不断取得成绩, 我们的事业定能不断前进!

谢谢大家.

在中国数学会第五届理事会第二次会议上的工作报告*

各位同志：

本届理事会任期是1988年开始，1991年结束．现在我代表本届常务理事会向各位同志扼要汇报一下四年来我们做的一些工作及我们的工作体会．

一 四年来的工作

中国数学会的工作大体上分成两类，其一是经常性的工作，这项工作由各工作委员会和专业委员会负责主持，其二是一些特殊的事情，由常务理事会指定专人负责，现在我就这两类工作分别汇报如下：

1．经常性的工作．

①学术交流工作：这四年共支持国内学术会议58次，参加人数有5500人次，共宣读论文4500篇．

②编辑出版工作：以数学会名义编辑出版的杂志共10个，这些杂志均有挂靠单位．这四年中，好几个杂志都调整过编委会，讨论过办刊方向，努力提高刊物质量．

③普及工作：每年分高中与初中举办国内数学联赛，选拔与培

---

* 原载《中国数学会通讯》，9，1991，2～5．

训出国代表队参加国际数学奥林匹克，连年取得了好成绩．1991年开始举办了小学数学奥林匹克．

④传播工作：这是1989年理事会会议上成立的一个工作委员会，其任务在于进行数学竞赛以外的数学普及工作，数学传播委员会成立后，积极开展了各种工作和活动，例如由他们负责组织的《走向数学》丛书等，今年已搞了首次全国优秀数学传播类图书的评选．

⑤组织建设与改革尝试：我会理事会这次换届进一步实行改革，在征求了全体理事的意见后，决定不召开全国代表大会，下届理事由各省、市、区数学会推选后由常务理事会确认．

从1989年开始我会进行会员重新登记并颁发统一的新的中国数学会会员证，目前已有24个省市自治区数学会进行了会员登记和颁发会员证的工作，推动了地方数学会的建设和学会活动的开展．

2．特殊性的工作．

这种工作是一些特别的任务，均有时间性，所以数学会组织一些专人负责进行．

①1990年举办了第31届国际数学奥林匹克（IMO）．中国是东道国，中国数学会是五个主办单位之一．我国选手得到五块金牌，一块银牌，团体总分第一．中国数学会与中国数学奥林匹克委员会，组织了十多位高水平的数学家对各国提出的一百多道试题进行了简化与改进，组织了中国科学院、北大、复旦、科大、南开等单位五十一位数学家担任协调员，他们对各国和地区的试卷进行了准确的核查．这些工作的完成反映中国数学的整体水平，获得各参赛国的好评．我们有一百多位数学家参加组织工作和后勤工作，他们在很困难的条件下，出色地完成了任务．我告诉大家一个消息，香港政府已批准1994年在香港举办第35届IMO，这将是第二次

在亚洲地区举行 IMO.

②六十多位数学家参加了 1990 年在日本京都召开的国际数学家大会及会后的一系列学术活动，开阔了眼界，增强了信心，特别是中国数学会与位于中国台北的数学会联合参加了国际数学联合会（IMU）全体会议.

③组织六十多位数学家参加 1990 年在香港召开的第一届亚洲数学家大会，我们有十多位数学家应邀作大会报告或邀请报告，还有十人主持了学术报告会，大面积地宣传了中国的数学成就.

④组织了三十多位数学家参加 1991 年 6 月在香港召开的“程序结构与电算语言代数国际学术会议”.

⑤我会概率统计分会于 1989 年 11 月组织了 30 多人参加了在日本东京举行的“中日统计第三次学术会议”；于 1990 年 12 月组织了 40 多人参加了在香港召开的“泛华统计学会第一次学术会议”.

⑥经国际数学教育委员会主席提议，由中国数学会与北京师大等六单位联合举办，于 1991 年 8 月 5 日至 8 月 8 日在北京召开了“国际数学教育北京会议”. 到会代表有 300 多人，其中外国代表约 130 人.

⑦组织我国数学家的优秀著作到国外出版，仅通过科学出版社与斯普林格出版社联合出版的渠道就不下二十本. 另外还出版《统计在中国》,《概率在中国》与《计算数学在中国》等著作.

⑧组织翻译《苏联数学百科全书》共十卷.

⑨组织《走向数学》丛书，不少著名数学家为该丛书撰稿.

⑩组织讨论钱学森教授在中国数学会作的“数学科学与理工科数学教学改革”报告. 我们在北京与上海举行了座谈会，对我国大学数学教改起了一定的推动作用.

⑪组织评选“陈省身数学奖”两次. 这一奖金是国内很成功的

奖金之一，有较好的国内外影响．我告诉大家，鉴于这一奖金办得很好，香港亿利达工业集团总裁刘永龄先生答应再资助经费六年，共十八万元港币（每两年六万元港币）．

二 工作体会

1．我们的工作得到上级领导，社会，各研究所，大学及广大数学家的支持．第31届IMO之后，江泽民总书记与李鹏总理接见了参与IMO的部分数学家与全体选手．国家对第31届IMO财政拨款120万元人民币．香港企业家徐展堂先生及国内许多单位大力资助，很多数学工作者对中国数学会十分关心，无偿地为数学会服务．还有中国科协对数学会的领导与经费支持，与数学有关的各单位对数学会作出的支持，特别是数学会的挂靠单位中国科学院数学研究所的支持．我告诉大家，常务理事会建议将挂靠单位扩大为中科院数学所、应用数学所与系统科学所三所，已得三所同意，并分别拨出新楼的一间房子给中国数学会办公室用，我代表中国数学会向所有支持我会工作的单位和个人表示衷心的感谢！

2．中国数学会能够顺利完成上述工作的重要原因之一是有一个团结合作、相对年轻的领导集体，从总结经验的角度出发，有下列经验值得坚持：

①坚持集体领导，分工负责与民主办会．数学会领导是民主选举产生的，大事通过常务理事会决定，包括分工在内，一切决议及时在《中国数学会通讯》上发表让全体会员知道，达到充分透明度．民主与透明是团结的基础．

②对中国的数学现状比较了解，所以办事比较公正．能做到这一点的基本保证是集体领导．

③比较实事求是，一切从实际出发，凡有利于工作的改革就干，而且是尽量稳妥地进行改革．

④较好地做到吸引数学家来为数学会工作，争取社会各方面对数学会的支持.

⑤注意加强跟港澳与台湾数学家的交流与合作.

以上五方面，我们做了一些工作. 我们觉得做得很不够的是发挥大家积极性不够，还应该开拓更多的工作面，把大家吸引到发展中国的数学事业中去；如何发挥京外的理事的积极性，不仅做得不够，还未找到很好的途径来做；如何加强中国数学会对各省市自治区数学会的指导与联系还有待进一步探索. 所以中国数学会虽然做了一些工作，但离全国数学界对我们的信任与要求，还有差距，欢迎新老理事们对这届理事会的工作从多方面提出批评建议. 现在新的理事会已经产生了，他们是各省市自治区数学会和有关单位通过民主协商，用适当方式推选出来的，有较好的群众基础和一定的代表性，我们深信他们将在我们这几年工作的基础上把数学会的工作搞得更好，一定能将中国数学事业推向一个新的高峰. 我代表本届理事会预祝他们在未来的工作中顺利成功!

话说数学所的经典分析*

数学所的经典分析主要是华罗庚领导的解析数论与熊庆来领导的单复变函数论．此外还有富利叶分析，函数逼近论及微分方程的一部分．韦依认为解析数论应属于分析，这是对的，因为解析数论主要在于创造与改进一些分析不等式，数论问题是它们的背景与应用．

早在 50 年代初，华罗庚就组建了以研究哥德巴赫猜想为中心的"数论讨论班"．所谓哥德巴赫猜想是 1742 年哥德巴赫与欧拉通信时产生的一个猜想，即"每个大于或等于 4 的偶数都是两个素数之和"，简称"1+1"．从 20 年代开始，由于研究这个问题而产生的"圆法"、"筛法"与"某些指数和估计方法"都是解析数论的强有力方法，大大地推动了数论乃至其邻近学科的发展．华罗庚选择哥德巴赫猜想来研究的战略眼光是通过对这个问题的成果的学习而达到对解析数论重要方法的掌握．这是培养青年干部的一条好途径．华罗庚并未企望在哥德巴赫猜想本身会得到结果．

那时用筛法得到的最佳记录是原苏联数学家布赫夕塔布在 1940 年证明的"4+4"，即"每个充分大的偶数都是两个素因子个数皆不超过 4 的整数之和"，简称"4+4"，及匈牙利数学家瑞尼于 1947 年证明的"1+C"．若用瑞尼的方法来计算 C，这将是一个

* 原载《中国科学报》，1996．

天文数字．应该说这两个结果还有较大的改进余地．初生牛犊不怕虎，有的青年人偏要碰碰这个猜想．1956 年与 1957 年，王元证明了“3 + 4”与“2 + 3”．1962 年，数学所讨论班的参加者山大讲师潘承洞证明了“1 + 5”与“1 + 4”．不料在 1965 年，意大利数学家庞比尼与原苏联数学家阿·维诺格拉朵夫分别证明了“1 + 3”，他们不仅夺走了中国人的记录，而且有数学家估计用筛法做出“1 + 3”已经到“头”了．陈景润偏不信邪，他于 1966 年证明了“1 + 2”．证明全文发表于 1973 年．在 1974 年英国出版的哈贝斯坦与黎切尔特的“筛法”书，作者就是在见到陈景润的文章后加上最后一章“陈氏定理”的，称之为“惊人的定理”，“从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点”．

1957 年，64 岁的熊庆来由法国回国定居了．他不顾年老体衰，毅然在数学所组织了“整函数与亚纯函数值分布理论”的讨论班．所谓值分布理论为讨论函数的“亏值”，即取不到的那些值，例如指数函数就取不到“零”．当然“亏值”的含义也在不断地扩充．“亏值”数量的估计是个中心问题．讨论班的参加者均年龄偏大了．直到 60 年代，才有些青年陆续给熊庆来做研究生与研究实习员．不久，讨论班即因“文革”而终止，但有些青年并未中断自己的工作．

1976 年 5 月 3 日至 27 日，美国派来了一个以麦克莱因为团长的十一人“纯粹数学与应用数学访华代表团”，访问了数学所及几所重点大学，听取了六十几个工作报告．代表团回国后，写了一个长达 115 页的“报告”，重要部分已正式发表了，详细地介绍了中国的数学．关于“文革”前，“报告”指出：“这一时期，解析数论与代数拓扑是最强的领域”，并提到华罗庚，吴文俊，冯康、陈景润与万哲先的名字与工作．

关于中国数学的现状，“报告”指出：“很少几个数学家在从事

分析研究，有些创始性的工作是真正优秀的，在考虑到这些工作是在孤立状态下完成的就更令人感动了，特别解析数论与亚纯函数的工作是优秀的."“数学所在解析数论方面的优秀工作是华罗庚的一群学生作的. 近年得到的杰出结果是陈景润关于哥德巴赫猜想的最佳记录定理."“中国数学家在复分析方面最有价值的贡献在于奈凡林那理论方面，这些工作是数学所的杨乐与张广厚作的. 世界上很多数学家在这一领域仔细地耕耘了半个世纪，它需要令人生畏的分析技巧. 对这个古老学科来说，杨乐与张广厚得到了一些新的与深刻的结果."

从此，陈景润，杨乐，张广厚成为中国数学界的“黑马”登上了数学舞台. 当然也由于宣传上的某些不当，使成千上万不具备数学基本训练的人向哥德巴赫猜想“进军”，造成了损失，这是美中不足.

当年这些生气勃勃的青年都已经年过半百了. 中国的经典分析非常期待于青年一代人来继续开拓.

总结经验　继续前进*

从 1984 年第四季度起，数学所就逐步向全国数学界开放了．一年来，我们邀请了十六位国内优秀中年数学家来所工作，共工作了三十八个人月，吸收了十五名进修人员（包括大学教师及硕士研究生）；共举办了五个基础数学研究班，计二百余人，包括有理逼近、奇点理论、生物数学、泛函分析等领域．我所邀请来的访问学者来自北大、复旦、科大、吉大等高校，加上进修人员与研究班人员，几乎遍及全国各省、市、自治区（只有台湾和西藏没有）．

今年我所开放的主要研究领域是我所卓有成绩的解析数论，也开放了奇点理论与矢量测度理论等．通过这种开放，初步改变了数学所关门办所的局面．由于加强了学术交流，学术空气变浓了，研究工作加速了，出现了某些竞争的局面．

明年，我们将在今年的基础上使应聘来所访问的学者和进修人员增加一倍，继续举办几个研究班，以分析为重点开放领域，并开始研究切实可行的对国外开放的有关措施．

一年来我所对外开放的实践使我们体会到：①认真处理好所内人员与来所访问人员的关系是很重要的．我们通过各种形式向所内同志说明有关情况，使大家充分理解了对外开放的意义，从而使所内外人员之间能彼此融洽共事．②不是先搞条件，先达到正规化，

---

* 原载《科学报》，1985 年 8 月 25 日．

而是因陋就简，边开放边改善各项条件，逐步加快开放的步伐．③院里要给开放研究所（室）以较大的自主权，要根据搞理论与搞实验这两种不同类型的研究，实行不同的管理办法．

总之，我们要总结经验，巩固已有成绩，继续前进，为将数学所办成全国数学研究中心而尽最大的努力

附录：关于数学研究所对外开放的报道

中科院数学所探索办开放型研究所的路子*

王元教授认为，应把数学所办成全国数学界开展科研、进行学术交流和造就人才的基地

本报讯　最近，著名数学家、中国科学院数学研究所所长王元和副所长杨乐等同志，在他们领导的所开始探索办开放型研究所的路子．目前，开放的准备工作正在积极进行，第一批来自全国科研单位、高等院校的访问学者二十多人，即将来参加合作研究和学术交流．

王元教授说，办开放型研究所，国外比较常见，我们自己也有过经验．数学所过去同国内外数学界人士有较密切的联系，50 年代到所里从事过科研工作的人，现在大部分已成为学术上有造诣的学科带头人，有的还担任了大专院校、科研单位的领导工作．王元认为，中国科学院数学所有一批学术水平较高的数学家，同时，拥有一个专业图书、刊物比较齐全，在世界同行业中也称得上是资料丰富的图书馆．因此，我们完全可以利用这些有利条件，把数学所办成全国数学界开展科学研究、进行学术交流、造就人才的基地，办成在世界上有一定影响的学术机构．

在谈及办开放型研究所的好处时，王元指出，首先，能增加研

* 原载《光明日报》，1985 年 1 月 21 日．

究所的活力，访问学者、进修人员和研究生一批批来到所里，就会不停地萌发出新的学术见解．这种科研力量的流动结构，可以冲破部门所有、死水一潭的局面．第二，能增加研究所内部的压力，全国学术界的佼佼者荟萃之后，必然会推动研究所内部人员结构的变化．第三，能充分发挥国家为数学所创造的条件，使其达到资源共享．第四，通过开放，可以发现人才、造就人才，促进科研队伍一代新人的成长．第五，能更好地发挥中国科学院这个全国自然科学综合研究中心的作用．

（欣　文）

经著名数学家王元、杨乐的申请 中科院批准数学所办成开放型的研究所*

经过改革，这个研究所只有少数的长期研究人员，而大部分研究人员将实行短期聘任制

本报讯　记者刘敬智报道：前不久，中国科学院数学研究所所长王元、副所长杨乐，向中国科学院提出申请，要求改变过去那种封闭式办所的旧体制，把从事纯数学研究的中科院数学所办成向国内外开放的数学所，以充分发挥该所在我国数学发展及四化建设中的作用．

根据这一申请，4月6日，中国科学院组织周光召、柯召、段学复、胡世华、程民德、姜伯驹、潘承洞、王梓坤、吴文俊等十六位著名数学家、教授、研究员进行了座谈评议．

专家们认为，纯科学研究机构办开放型研究所，完全符合中共中央“关于科学技术体制改革的决定”精神．它将能充分发挥我国

* 原载《光明日报》，1985年5月15日．

现有人才和设备的潜力，使我国的科学研究事业用较少的投资取得较大的效果.

中科院数学所研究力量比较雄厚，学科领域比较广阔，并有丰富的数学专业藏书，具备了对国内外开放的基本条件. 在开放型的数学所里，长期的研究人员将变得很少，大部分的研究人员将实行短期的聘任制，其中有相当多的人员是国内外的访问学者及有培养前途的进修生，这既可以集中全国以及国外的优秀人才增强难题攻关的实力，又可在不与我国目前人才单位所有制发生矛盾的前提下，促进人才的合理流动，充分发挥人才的作用，同时，还可发挥中科院数学所在理论和设备方面的优势，为全国各地培养和输送一批又一批的高水平数学人才，为提高全民族的文化水平做贡献.

与会专家还提出，为了办好我国第一个开放型的数学研究机构，数学所应该成立一个权威性的学术委员会，由全国的一些知名学者组成. 这个委员会负责审议该所向全国开放的科研项目，人员构成及科研计划等重大问题.

最近，中国科学院已正式批准数学所的申请，作为第一个办开放型研究所的试点单位，希望他们能开动脑筋总结经验，把数学所办成一个真正的全国数学研究中心，对我国数学的发展发挥应有的作用.

关于报道学术成就的几点意见*

1.《科学报》将要在全国发行，它将面向全国科技战线．对于我国的科技成就，应该及时地多多报道，使之起到相互交流与鼓舞科技干部奋发努力的作用．

2．报道首先要注意科学上的严谨与准确，需将所报道的科技工作如实地说清楚，包括这项工作过去的水平、现在的改进及其作用．由于自然科学的成就往往需要相当长时间的检验，才能逐渐了解它的价值．技术上的改进，例如研制出一台仪器，也需经过一定时间，才知它是否能正常运行．所以关于工作评价，务必慎重、实是求是．看不准，可以先不作评价．切不要把某个专家或洋人的意见，甚至只言片语作为依据，作不切实际的夸大宣传．

3．学术上取得成就往往有多方面的因素，主要由于科学家长期的努力与积累，才能对事物规律的认识产生飞跃．这中间当然也有政治觉悟、爱国心等原因，亦有机遇、追求真理的愿望、好奇心、个人兴趣等，不要仅仅归结为某种原因，这是不能使人信服的．更不要把科学上有成就的人描写成政治觉悟很高的完人．

4．报道前要广泛听取各方面的意见，报道后也要允许发表不同看法．报纸不要主观支持某种意见，反对另一种意见．

---

* 原载《科学报》，1984 年 12 月 8 日．

附录：关于基础理论择优支持的报道

慎重选题　大胆择人*

——中国科学院院士王元谈基础研究的择优支持

本报记者　马春沅

如何有效地利用有限的资源和资金，尽快地发展我国的基础理论研究，抓住重点择优支持，是一个十分重要的问题．最近，中国科学院院士王元教授在接受记者采访时，针对这个问题阐述了他的见解．

王元说，一个学科中的领域与课题，大体上有四种情况：第一类是已完全成熟，不再继续发展，或已可判断继续发展的价值不大，再出现重大成果的机会很小；第二是基本上成熟的领域，即学科的框架已建立，但有些重要的问题未解决，以待研究；第三是正在走向成熟的领域，这种学科的框架已基本建立，还需继续完善，尚待解决的问题还不少；第四是正在发展的领域，学科框架尚未建立．第一类学科与课题不应该支持．如果一个课题本身不能发展，你有天大的本事也没用．第二、三类的领域与课题应该支持，但需注意，被支持的研究人员应是素质较高的，而这些领域在我国又有较好的基础，可支持他们取得在国际上有影响的高水平成果．第四

---

* 原载《中国科学报》，1994 年 3 月 11 日．

类的领域与课题当然要支持，但也要慎重并具有眼光，即能较准确地预测这个领域将来有所发展，能成为一个有重要成果的、有影响的领域，而且能带动其他方面的发展．千万不要看到外国有不少人搞，就一哄而上，凑热闹，而不作自己的分析与判断．

王元认为，在择优的过程中，评价人的素质很重要，尤其是学科与课题带头人的素质更重要．看一个研究人员的素质要从历史与现状来看，即这个人在过去有没有做过较好的研究工作，有没有攻过科学难关．从现状上看，要看他现在对所从事研究的学科的整体了解如何，实力如何，攻坚能力如何．这一点跟年龄有关，老年科学家除个别人外，其攻坚能力随年龄增加而下降，较适宜作宏观指导．相反，太年轻的研究人员，除个别人外，由于知识面窄，经验不足，宜在有经验的科学家领导下工作，逐步向独立工作过渡．学科与课题负责人应以三、四十岁的人最为适宜．哪些人的素质较高呢？学术界是自有公认的，只要广泛听取意见，就不难知道．

王元教授希望，重点支持一些单位，使之成为我国基础研究中心．不要到处铺摊子，将有限的资金分散，弄得到处上不去．研究中心的行政机构也要少而精，注意效率．

王元教授还说，数学是所有自然科学及某些社会科学与管理科学的基础与工具．由于数学水平的限制，往往制约了这些学科由定性研究向定量研究发展，也制约了电脑在这些学科中发挥应有的功能．王元强调，像数学这样的学科，就符合基础强、涉及面又很广的条件．因此，在我国适于提倡数学的发展，数学应在择优支持之列．

同中学生谈谈学习数学*

一　数学是重要的工具

恩格斯说过“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”．“量”是贯穿到一切科学领域之内乃至日常生活之中的．天下有各种不同的量，例如尺，斤，斗，秒，伏特，欧姆和卡路里等等，但都要通过“数”才能确切地表示出来，所以“数”是各种各样不同的量的共性．“量”既然是贯穿到一切科学之中的，因而凡是要研究量，量的关系，量的变化等就都少不了数学．因此，数学的用处也就渗透到一切科学领域之中．我们都是生活在宇宙之中的，一切行星都在其中运动，弄清它们运动的规律，也必须借助于几何学来研究空间形式．以上都是一些简单的例子．从这些例子不难看出，数学是一切自然科学，技术科学乃至社会科学的得力助手和工具．任何一门科学，如果缺少了数学这一有力的工具，便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，因而也就减少了它的精确性．因此数学的应用是十分宽广的．而且社会愈进步，科学技术愈发展，应用数学的范围就愈大、愈深．我这样说，是不是意味着其他科学不重要或者次要呢？不是的．恰恰相反，数学之所以重要，正是因为其他科学的重要而重要的．因为上面已经说过了，不通过其他科学，数学的力量就无法显示出来，也就无所谓重要了．所以无

---

* 原载《鞍山日报》，1979 年 1 月 22 日．

论你们将来搞什么，学好数学都是很必要的.

党的十一届三中全会号召我们：从今年开始将全国的工作重心转移到搞四个现代化上来. 这是一个多么宏伟和鼓舞人心的计划啊！同学们，你们在这二十二年中，正值青壮年，你们是建设四个现代化的主力军. 因此，你们要以四个现代化为动力，努力学习，学好基础课之一的数学，将来为实现祖国的四个现代化贡献出一切力量.

二 靠天才，还是靠勤奋？

我们承认人的天份是有差别的. 所谓天份高低无非是理解问题快一点与慢一点的差别而已. 知识都是通过学习与实践而得来的，决不会生而知之. 所以，无论什么人学什么本领，都是通过刻苦努力，勤学苦练才学会的. 理解得再快，不努力也决不会学到什么真本领. 学数学也是一样的，只要我们不断努力，总能学好数学，掌握它的规律. 我国著名数学家华罗庚同志说过："天才在于勤奋，聪明在于积累." 这是他几十年来工作与研究的心得，其要点在于"勤奋"与"积累". 所谓"积累"就是学习历史的重要遗产与别人的好经验，其中也包括总结自己的心得体会. 有了丰富的积累，才可能突破旧框框，有所创造，这就是聪明的来源. 但这都离不开"勤奋"，经过刻苦努力，获得重大成就，这就是天才的来源. 因此，你们要抓紧一切时间学习，要"曲不离口，拳不离手"地学习. 正因为不断地积累知识与勤奋工作，才使华罗庚同志在数学的很多方面获得突出的成就. 陈景润同志能在哥德巴赫猜想方面做出突出成就，证明了"1+2"，也是在于他的"积累"与"勤奋". 他首先弄清了历史上研究哥德巴赫问题的各项成就，在这个基础上，经过多年勤奋努力，然后才突破旧框框，改进了前人的结果. 我们决不要上林彪、"四人帮"鼓吹的反动的"天才论"的当，以为什

么预备知识都不要，就可以去研究什么历史上的著名难题，例如哥德巴赫问题等．这样做，结果总是一无所得的．也不要自以为没有数学“天才”，就灰心丧气，放弃努力．其实，只要认真积累，勤学苦练，一般人都能学好数学，掌握它的规律，甚至有所发明创造．

三 掌握基本概念，精学多练

在学习阶段，尤其是中学学习阶段，是打好基础的阶段．基础好坏，对将来进一步学习与工作的关系极大．这就像盖房子一样，基础好，房子才能盖得牢，盖得高．所以学习数学首先要掌握基本概念．例如什么是整数、有理数等等都要弄清楚．又如一元二次方程解的公式是怎么推导出来的等等，也都要知其所以然．在中学阶段中，平面几何学是最好的训练逻辑思维与推理的课程，应学会严格的“假设，求证，证明”这一套格式与方法．多做练习是学好数学知识与掌握它的规律的必要手段，仅仅看书是不够的．但做什么样的习题呢？一味去追求一些难题、怪题是不妥当的，这样往往会忽略对基本概念的全面了解．但是另一方面，只做一些代公式的题目，同样也达不到掌握概念与训练思维的目的，也是不妥的．因此，做一些代公式的习题之后，也要适当做一些思考题，即经过一定周折之后才做得出来的题目．除此而外，学习还应注意少而精的原则，要在“精”字上下功夫．学一样知识，务必要求掌握，要求踏实．所以首先要学好学校规定学习的内容，不要乱看参考书，数学尤其是这样，宁肯少掌握一点，而不要囫囵吞枣，吃一大锅夹生饭，这样一点好处也没有．如果学好了学校规定的材料之后还有余力，最好也要在老师的指导之下进行一定的课外学习比较稳妥．

以上谈的几点意见，供同学们参考．让我们共同努力，刻苦奋斗，以更好的成绩向党，向人民报喜吧！

树立远大理想，敢于攻破难关*

1960 年，我看到新出版的原苏联数学家布赫夕塔布写的教科书《数论》第 358 页上写道：

"王元在 1958 年成功地证明了

定理 347. 每一个充分大的偶数 $2N$ 都可以表成 $n+n'$，其中 n 的素因子个数不超过 2，而 n' 的素因子个数不超过 3"（即 "2 + 3"）.

我总算为伟大的祖国作出了一点贡献，我激动得热泪盈眶，浮想联翩.

好容易盼到了解放，我多么想为祖国贡献我的一切呀！1952 年大学毕业，我被分配到数学研究所跟著名数学家华罗庚学习并一起工作. 华老师叫我搞数论，而且指导我研究筛法与哥德巴赫猜想.

1742 年，德国数学家哥德巴赫写信给大数学家欧拉，提出了猜想，即每个大于 2 的偶数都是两个素数之和，即 "1 + 1"，二百多年来，这一问题吸引了世界各国很多优秀数学家来研究它.

当时(1952 年)我是一个 22 岁的青年，研究这样难的问题，能行吗？弄不出成果怎么办？但强烈的爱国心使我把个人得失放在一边，我毅然地向这一难题进攻了. 从 1920 年开始的有关文献，不管是

---

* 原载《科学家谈理想》，安徽人民出版社，1983，26～30.

英文,俄文,德文,意大利文,能找到的,我都查了出来.然后,认真分析其中的思路及可能存在的欠缺之处.意大利文我不懂,就从数学式子去猜测文字的含义.为了工作,我忘了星期天.累了,我就伏在桌子上休息一下,有时工作到东方发白才去休息.记得有几次,一直工作到病倒了,才强迫自己去休息几天.为了找到一切资料,我跑遍了北京的大图书馆.当时找不到布赫夕塔布 1938 年与 1940 年的两篇文章,怎么办呢? 有一次,听说有一批俄文版旧书到了王府井科学院图书馆,一大早我就从清华园赶到王府井.刚开始办公,我就进了图书馆,管理员很支持我,让我从未登记的书中找到了布赫夕塔布的文章.于是,我就埋头抄起来,中午吃两个火烧再接着干.两天终于抄完了.就这样,一连苦干了两年.

但是，什么成果也没取得．我动摇了，自卑了，怀疑自己没有干哥德巴赫问题的天分，还不如干点力所能及的工作好哩．正在这时，我偶然用筛法取得了一些别的成果，并获得好评．于是，我放弃了对哥德巴赫猜想问题的研究．这时华老师严肃地批评了我："你要有速度，还要有加速度．"所谓速度，就是要出成果，加速度就是成果的质量要不断提高．"你不要再做这些小问题了，你要坚持搞哥德巴赫猜想．"

我为自己的动摇而惭愧，决心重新振作精神干下去．终于在 1955 年，我证明了"3 + 4"，这就第一次打破了布赫夕塔布在 1940 年的记录"4 + 4"．以后，我把我用的方法加以改进，证明了更强的"3 + 3"与"2 + 3"，并于 1958 年全文发表了我的成果"2 + 3"．这一成果很快得到国际公认．

1958 年，华老师又提出用代数数论来研究多重积分近似计算．这一问题有重要的理论与实际意义．他要我跟他一起去尝试．这时，我过去熟悉的知识与经验基本上都用不上了，而需要很多我不懂的数论知识．当时，我连最简单的连分数也不掌握，如何当好华

老师的助手呢？这就意味着一切都要另起炉灶了．怎么办？是沿着已经熟悉的老路走，还是趁自己年轻时，另辟新路，在另一个领域也作出贡献呢？我毅然选择了后面这条更为艰难险阻的道路．这个课题，除需要很多数学知识外，还需要电子计算机．不懂，我就从头一点点地学，一点点地将问题的研究逐步深入下去．当时计算机还很少，我们就尽量用笔算．完全不能笔算，才用计算机来算．1959年，我们先得出二重积分近似计算公式．1965年形成了我们自己近似计算高维重积分的方法——华王方法．

1966年，"文化大革命"中断了我们的工作．但只要有一点可能，我们仍在偷偷地干．我对华老师的每个想法都认真进行思考、消化，然后再向他请教．在这么困难的期间，我们仍给出了这个方法的理论证明．

1976年，万恶的"四人帮"被打倒了，我们百倍地努力工作．我协助华老师将我们的工作总结成书，并于1978年正式出版．

不少外国学者建议我们出英文版，从而我们决定在西德斯普林格出版社出版．当时，是请人翻译，还是自己来译呢？自己译则可以借出英文版的机会对书再作一次修改补充，尽管中文版写了四遍才定稿．我平时只用英文写过简单文章，用英文写一本二百五十页的专著行吗？我决定边学边干，写出了第一稿．经华老师修改，只用一年时间就定稿了．

1981年，我看到了精美的英文版书，既高兴又激动．二十三年来，华老师与我心血浇灌的成果终于展现在面前了．不久，我们又见到了日本数学家江田义计教授的日文译本．

回顾三十年走过的道路，我深深感到，我们要有雄心壮志，树立远大的革命理想，无所畏惧，敢于攻关，还要在具体工作中一丝不苟，踏实苦干．惟有这样，才能作出应有的贡献．

勤奋、踏实、多思*

从你们进小学开始，每学期都有数学课，而且份量很重．将来你们上大学，还要继续学习数学．特别在今天，微电脑广泛应用，数学训练就更显得日益重要．因此，同学们首先要对数学的重要性有充分的认识．

小学是每个人的开始学习阶段．你们一定要养成勤奋学习的好习惯．今天的作业要今天完成，不要拖到明天．千万不要先玩耍，等玩累了再做功课．这样效率一定是低的，这样的拖拉习惯也是有害的．

在小学学习数学，一定要弄清楚每个概念及每个公式的来源．对于四则运算要熟练．一定数量的重复运算对于掌握所学的内容是必要的．不可以知其然而不知其所以然，或自以为会做了，就不愿意多做习题．

但另一方面，整天埋在“题海”里做同一个类型的题目也是不对的，应该做一些需要拐几个弯子的题目．当做出来后，不要以为就完成任务了，还要多多思考，有没有更简单的解题方法．你们彼此也可以多多讨论．这样就可以学得更活泼、更深入．

注意到勤奋、踏实与多思，我相信你们的数学一定会学得好的．

---

* 原载《小学生学习报》，1985年1月1日．

数学家



在纪念陈建功先生诞辰 -百周年分析会议上的讲话*

女上们，先生们：

我非常高兴能参加今天为纪念陈建功先生诞辰 -百周年而召开的国际分析学会议. 首先请允许我代表中国科学院数学研究所，应用数学研究所，系统科学研究所与计算中心向大会致以衷心的祝贺，祝大会取得圆满成功. 其次我想以大会领导小组成员及陈老一名学生的双重身份来说几句话. 在浙江大学时，我曾是陈老的复变函数论与实变函数论课的学生.

陈老生于 1893 年，那时的中国科学技术是非常落后的. 为了富国强兵，振兴中华，陈老曾于 1914，1920 及 1926 年三次东渡日本，刻苦求学，将学得的知识引进中国. 因此他是中国近代数学研究与教学最早的创始人与开拓者之一.

陈老最早是学习化工染色工艺的，但他却对数学有强烈的兴趣. 在日本期间，他利用晚上及假日的点滴时间攻读数学. 他在第三次东渡日本时，获得了东北帝国大学的理学博士学位，从而数学倒成了他的专业了.

陈老是我国分析学的创始人之一，他专攻三角级数论及更广泛

* 这是 1993 年 5 月在杭州举行的纪念陈建功先生诞辰一百周年分析会议开幕式上的讲话（未发表）.

一些的正交级数论，取得了很高的成就．例如在1928年，独立于哈代(Hardy)与李特伍德(Littlewood)，陈老给出了$f(x)$的三角级数绝对收敛的充要条件：该级数为杨氏(Young)连续函数的傅里叶(Fourier)级数．所谓$f(x)$为杨氏连续函数，即它可以写成两个平方可积函数$g(x)$与$h(x)$之卷积：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)h(y+x)\mathrm{d}y.$$

这一结果是三角级数论的基本定理之一．

早在1921年，陈老就在日本《东北数学杂志》上发表了论文《关于无穷乘积的几个定理》．这是中国人最早在国外发表的少数文章之一．1930年，陈老用日文撰写了专著《三角级数论》，由日本岩波书店出版．这是中国人在国外发表的第一本专著．该书的出版无疑大长了炎黄子孙的志气．

陈老在六十高龄之后，仍然不停地开拓前进．50年代初，他在浙大创导对单叶函数论的研究，以后又在复旦大学与杭州大学创导复变函数逼近论与拟共形映照理论的研究，取得了一系列重要成果．

陈老特别重视对年轻数学家的培养工作．1921年，陈老往武昌高等师范学堂执教，立即使该校的数学教育有了起色．著名数学家曾炯之与王福春就是他在那时的学生．1929年，陈老到浙江大学执教并担任数学系主任．1931年，陈老又建议浙大聘请日本理学博士获得者苏步青先生来浙大执教，并将数学系主任之职让苏老承担．他们二人亲密合作，苦心经营了二十年，即使在抗日战争的艰苦岁月里，亦未中断研究与教学工作，将浙大数学系建成为中国最重要的数学研究与教学中心之一，为中国培养了程民德，卢庆骏，徐瑞云，叶彦谦，龚升，夏道行，王斯雷等一批骨干数学家．

陈老热爱祖国、刚直不阿与敢于直言的品德，深得中国数学家

的尊敬. 另一方面, 他的这种品质也使他在历次政治运动中受到了冲击与不公正的待遇. 特别在“文革”中受到了迫害. 在他重病期间亦未得到好的治疗, 于 1971 年过世.

中国执行改革开放政策十五年以来, 各方面均取得了举世公认的成就. 我们能在今天这样的形势下, 在陈老生前工作的地方举行国际分析学会议来纪念他, 实属盛举. 陈老的朋友, 学生及国际朋友一百多人, 济济一堂, 报告成果, 交流学术, 缅怀对陈老的思念. 我想对陈老最好的思念就是将他开创的中国数学事业继续下去, 发扬光大. 杭州是一个美丽的城市, 古语说: “上有天堂, 下有苏杭”, 希望各位代表也能抽空去领略一下西湖的美丽景色. 最后我再次预祝会议成功, 各位健康愉快.

在庆祝苏步青先生九旬诞辰会上的讲话*

尊敬的苏步青老师、女士们、先生们：

我非常荣幸能参加今天这样的盛会，庆祝苏老九旬大寿及他从事数学研究与教育工作六十五周年．在这个喜庆的日子里，请允许我代表中国数学会，中国科学院数学研究所，应用数学研究所，系统科学研究所及计算中心并以我个人，一个苏老的学生的名义向苏老致以最衷心的敬意、祝贺与感谢．祝苏老身体健康长寿，工作取得更大的成就

苏老是我国近代数学研究，特别是微分几何学研究的创始人之一，他对数学作出过卓越的贡献．他又是浙江大学数学系的创始人之一，并在复旦大学工作了近四十年．他为我国培养了好几代数学家与教师，桃李满天下．苏老非常爱国，解放前积极支持学生的民主运动，拒绝国外对他的高薪聘请，始终在中国艰苦奋斗．苏老在发展中国的数学事业方面有多方面的卓越贡献，影响极为广泛深刻，今天我仅就苏老对中国数学会的创立与建设方面的贡献作一点回忆．

苏老是中国数学会的创始人与领导人之一．中国数学会成立于1935年，中国数学会成立后的第一件大事就是创办《中国数学会

---

* 原载《中国数学会通讯》，4，1991，2～3．

学报》，即《数学学报》的前身，与普及性杂志《数学杂志》，即《数学通报》的前身.《学报》的出版可以看作是中国数学开始走向成熟的第一块里程碑.中国数学会任命苏老为《学报》总编辑，可见当时中国数学界已将苏老看成中国数学界的台柱.《学报》的编委中有熊庆来，孙光远，江泽涵等教授.在苏老主编的两卷《学报》中，除登有苏老与江老的论文外，还有青年数学家华罗庚，陈省身，许宝騄，柯召，周炜良，胡世桢发表的论文，及世界著名数学家阿达玛与维纳的论文.特别地，苏老选择了当时远在清华大学的青年数学家华罗庚为助理编辑.当时，华罗庚先生只有二十五岁，他没有受过正规的高中教育，在清华大学刚从助教升教员，但已经在国内外发表过十几篇文章，事实证明苏老挑选华先生做助手是很有眼光的，苏老是名符其实的伯乐.又据另一位当时的青年数学家陈省身的回忆："我在清华大学时，常常阅读国内微分几何学前辈的论文，读得最多的是苏步青先生的文章."可见苏老对下一辈的提拔与影响是很大的.又据苏老在《数学年刊》编委会的一次讲话，他满怀深情地回忆起比他年长的姜立夫与陈建功等教授对他的关怀与爱护，感人至深，苏老是十分尊重长者的.

中国数学会成立两年后，爆发了抗日战争，中国数学会也停止了活动.1940年，一些数学家在昆明成立了"新中国数学会"继续活动，苏老继续被选为理事，并任命西南联大青年教授华罗庚先生为会计，陈省身先生为文书，作为数学会的工作人员.

中国数学会真正的发展还是解放以后的事.中华人民共和国刚成立，苏老就积极筹备召开第一届中国数学会代表大会，苏老积极联络各地的数学家，并起草数学会的章程等，作了大量工作.中国数学会还存有当时苏老关于筹备数学会亲笔书写的文件的复印件.正是由于苏老等的努力，中国数学会早在1951年8月15日至20日就召开了第一次代表大会，从那时以后直到1983年，中国数学

会第四次代表大会，苏老改任数学会名誉理事长为止，二十二年间，苏老一直和华罗庚，陈建功，江泽涵先生等一起，共同领导了中国数学会的一切工作．这期间有1957年前的大发展，有“反右斗争”，“大跃进”，“拔白旗”及“文化大革命”的波折，也有“改革开放”后的发展．在这么长的日子里，特别在艰苦的日子里，苏老等老一辈数学家，始终坚定地领导了中国数学的健康发展，他们的功劳是永载史册的．1983年以后，苏老仍然继续关心中国数学会的工作．1985年中国数学会成立五十周年纪念会上，苏老发表了回顾演讲．《数学学报》创刊五十周年，作为第一任总编辑的苏老又专门撰文纪念．

我们感到无比的幸运与幸福，在中国数学会成立五十六年之际，我们这些后辈还能跟她的创始人之一及中国近代数学研究与教学的奠基人之一苏老在一起，共庆他的九十大寿，看见他那样健康，精神抖擞，思路清晰．他就是中国数学界团结奋进的象征与榜样，请允许我再一次祝苏老健康长寿，事业取得更大的成功．

杨武之先生与中国的数论*

杨武之先生是中国数论这门学科的倡始人．华罗庚，柯召与闵嗣鹤先生都是他的学生，受益他的教导与提拔．陈景润是华先生的学生，潘承洞是闵先生的学生，他们二人都是中国科学院的院士．我们虽然都没有见过杨先生本人，但从我们的老师与前辈的谈话中，早已得知杨先生对发展中国的数学与数论所作出的重大贡献及他对年轻数学家的培养与提拔，从而在我们的心中，很早就怀有对他的尊敬了．

杨武之先生是安徽省合肥市人，1896 年生，1918 年毕业于北京师范大学．毕业后，曾回家乡安徽省教过五年中学．1923 年考取了安徽省公费留学去美国．先在斯坦福大学数学系读了一年本科，得到学士学位．然后转去芝加哥大学攻读博士学位．1928 年获得博士学位．那时的中国，在数学方面获得博士学位者仅仅只有几个人，所以杨先生也是中国最早获得过博士学位的很少几个人之一．

杨先生在芝加哥大学的老师是美国著名的数论学家狄克逊(L.E.Dickson)，杨先生专攻堆垒数论．他曾证明了，每个正整数都是九个形为$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$的非负整数之和．在那个时候，这

* 原载《杨武之先生纪念文集》，清华大学出版社，1998．

一结果无疑是很好的. 1920 年左右，哈代（G.H.Hardy），李特伍德（J.E.Littlewood）与拉马努扬（S.Ramanujan）的圆法兴起了，这是堆垒数论的强有力的分析方法. 用这一方法能够得到华林（G.Waring）问题与其变体的相当精密的一般性结果. 在这种情况下，狄克逊审时度势，即时地转入了代数学的某些领域的研究之中，所以杨先生也从狄克逊那里学到了不少近世代数的知识.

杨先生热爱祖国，将振兴中华的数学作为自己的责任. 他得到博士学位之后立即回国，受聘于厦门大学，为发展中国的现代数学的科研与教学而尽心尽力. 那时作为中国自然科学最高学府的清华大学算学系主任的熊庆来先生雄心勃勃，招贤纳士. 1929 年，他特别聘请杨先生来清华大学执教.

清华大学算学系，虽然师生人数不多，但栋梁之才却不少. 至 1931 年，有研究生陈省身与吴大任先生，高年级学生许宝騄与柯召先生，及助理员华罗庚先生. 华先生是一位出身贫寒的自学青年，由于他发表过一篇文章，指出了一篇关于五次代数方程可以求解的文章的错误，从而受到了熊先生与杨先生的赏识而被熊先生调到清华大学来栽培. 由于华先生只有初中毕业的学历，所以安排他边学习边工作. 清华大学算学系中，除熊先生与杨先生外，还有微分几何专家孙光远先生，孙先生与杨先生都是美国芝加哥大学的博士，所以三位老师给五个学生上课. 华先生与柯先生受到杨先生的教导与影响特别多一些. 他们二人都选择了数论作为自己的研究领域，并且都在 30 年代中赴英国进一步深造. 杨先生除教他们二人数论并将他们引上研究数论之路外，还开设过群论等代数课，所以他们又从杨先生那里学到了近世代数的知识.

华先生受到杨先生的指导与帮助更多一些. 杨先生鼓励与支持华先生自学堆垒数论中的解析方法——圆法及指数和估计中的维诺格拉朵夫（I.M.Vinogradov）方法. 华先生写过一篇文章就是用圆

法及指数和估计方法证明了，每个充分大的整数都是八个三次整值多项式之和，这是杨先生结果的推广与改进．（见 Hua loo keng, On Waring's problem with culic polynomial Summands, J. of Indian Math, Soc; 1940, 127～135）

华先生在清华大学时，非常发奋，进步甚快．1933 年，作为清华大学算学系代理系主任的杨先生毅然地与清华大学老前辈，前系主任郑桐荪先生一起，并得到了理学院院长叶企荪先生的支持，将华先生从助理员提拔为助教．做成这件事的难度是很大的，助理员是职工系列，助教是教师系列，这是不能互换的，更何况华先生没有大学毕业的学历．1935 年，他们又将华先生提升为教员，从而使他能够更好地从事数学的研究与教学．1936 年，他们更进一步支持华先生到世界分析与解析数论中心之一的剑桥大学进一步深造．1938 年，华先生从英国回国．那时清华大学，北京大学与南开大学都逃难搬迁到了云南省昆明市，三校共同组建成西南联合大学，由杨武之先生担任数学系主任．在他的支持下，华先生被越级聘请为数学系教授．华先生在给杨先生的一封信中曾写道："古人云生我者父母，知我者鲍叔，我之鲍叔乃杨师也．"这段话充分表示了他对杨先生的感谢及二人相知与友谊之深厚．

闵嗣鹤先生生于 1913 年，1929 年考取了北京师范大学预科，1931 年升入该大学数学系，1935 年以优异的成绩毕业．在校期间，闵先生就有优异的表现，除积极参加学术活动之外，还发表过几篇文章．大学毕业后，经他的老师傅种孙先生的介绍，到师大附中执教．在这期间，他写出了论文"相合式解数之渐近公式及应用此理以讨论奇异级数，科学，24，1940，591～607"．该文也是属于哈代与李特伍德圆法的范畴．这篇文章引起了杨先生的重视，认为闵先生是一位有才华的青年，立即于 1937 年 6 月聘请他去清华大学算学系当助教（见迟宗陶等，闵嗣鹤教授生平，闵嗣鹤论文选集，

北京大学出版社，1991）．抗日战争爆发后，闵先生又继续去西南联合大学执教，成为华先生亲密的助手与合作者．

由于我撰写《华罗庚》一书需要核实一些事情，1993年，我曾经问过杨振宁先生是否知道杨武之先生曾经介绍闵先生去清华大学工作的事．杨振宁先生说："我不知道呀！"由此可以看出杨武之先生的高贵品德：给了一个年轻人这样大的帮助，不仅不求回报，甚至不愿意告诉别人这件事，包括自己家里的人在内．

北平解放前夕，杨先生曾搭乘国民党接北京大学校长胡适与清华大学校长梅贻绮的飞机到上海，后又转飞机去昆明将家属接到上海．解放后，这件事被认为是杨先生欲出国或去台湾，使他未能继续回清华大学工作，蒙受了不公正待遇．杨先生留在上海，应同济大学聘请，后又转去复旦大学，继续执教．在50年代，不幸患有糖尿病，于1973年仙逝．

由杨先生培养与提拔的三个学生就是中国数论的第二代骨干．华先生任中国科学院数学研究所所长与中国科学技术大学副校长兼数学系主任，柯先生任四川大学校长，闵先生去北京大学数学系执教．他们除自己从事数论研究工作之外，都积极培养年轻的数论学家．越民义、陈景润、潘承洞、严士健、吴方、孙琦、李德琅与王元等都出自他们的门下．这些人又招收学生，学生再招收学生，真是桃李满天下了．

数论既是中国最早开始研究的一门数学，也是发展得较好的数学领域之一，特别是研究的领域在迅速扩大了起来．除杨先生，华先生，柯先生与闵先生擅长的堆垒数论，三角和估计与不定方程外，可以说重要的数论领域在国内都有人在研究着，其中有些工作是会流传下去的，例如陈景润关于非常重要的哥德巴赫（C. Goldlach）猜想的结果，至今仍然在世界上处于领先地位．

抚今思昔，我们不能不深深地怀念与感谢中国近代数论的创始

人杨武之先生. 另一方面, 我们也深信, 杨先生如果在天有灵, 也会对他的弟子在继续他的事业中所作出的努力及取得的成绩而感到欣慰.

华罗庚：生平与工作简介*

华罗庚于 1910 年 11 月 12 日出生于中国江苏省南部的金坛县，他的父亲开一个小杂货铺．当华罗庚初中毕业时，由于家贫，不允许他继续升高中．然后他进入上海中华职业学校，在两年的会计专业中读了一年半．由于家贫，华罗庚在十五岁时被迫离校，协助其父经营小店，那时他只能利用业余时间学习数学．由于他对数学的兴趣太浓而不能全身心地关注小店的事，所以他的父亲很不高兴，以致于要烧掉他的书．

1927 年，华罗庚在金坛中学得到一个职员工作并跟吴筱元结婚．次年他们有了一个女儿，以后陆续有了三个儿子，两个女儿．最小的是 1951 年出生的．1928 年，华罗庚染上了伤寒病，病愈后，他的左腿致残了．

华罗庚在早年就表现出有数学才能．他的处女作登于 1929 年上海的《科学》杂志上．他的第二篇论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》发表于次年的《科学》上．这篇文章引起了清华大学数学系主任熊庆来的注意．自然熊庆来没有听见过华罗庚这个名字．以后数学系中金坛人教员唐培经告诉熊庆来华罗庚还没有高中毕业，仅为小村中一个职员．熊庆来很感动，从而邀请

* 原载 "International symposium in Memory of Hua Loo Keng, vol 1. Number Theory or vol 2 Analysis, edited by Gong Sheng etc, Springer-Verlag, 1991."

华罗庚来清华大学工作．起初华罗庚在系里任助理员，一年多之后，他被任命为助教．1934 年，华罗庚被提升为教员并被委任为“中华文化教育基金会董事会”乙种研究员．在这期间，清华同时代的人以后成为杰出数学家的有陈省身，许宝騄与柯召．华罗庚最初的研究兴趣为数论中的华林（Waring）问题，受到杨武之对他的指点．杨武之是美国芝加哥大学的博士，师从狄克逊(L.E.Dickson)．

1936 年，由于温纳（N.Wiener）的推荐，受英国哈代(G.H.Hardy）的邀请，华罗庚去了剑桥．尽管当华罗庚抵达英国时，哈代本人正在美国访问，华罗庚仍被安排认识一些年轻数学家，他们当中有达文坡特（H.Davenport），埃斯特曼（T.Estermann），兰金（R.A.Rankin）及蒂奇马什(E.C.Titchmarsh)．华罗庚在剑桥期间，至少发表了十几篇论文，很明显他受益于这些数学家，而且他们成为华罗庚终生之友．

1937 年，日本侵入中国，清华大学与北京大学、南开大学一起撤退到云南省昆明市，一起组建了西南联合大学，华罗庚由剑桥回国，从 1938 年至 1945 年，他担任西南联合大学教授．他的研究兴趣已拓广了，包括矩阵几何学，自守函数论，多复变函数论与群论．40 年代，他倡导了讨论班，参加者有段学复，闵嗣鹤，樊𰵶与徐贤修，这些人以后都成为著名数学家．

受原苏联科学院与原苏联对外文化协会的邀请，华罗庚于 1946 年访问原苏联三个月，从而认识了维诺格拉朵夫(I.M.Vinogradov）与林尼克（Yu.V.Linnik)．

1947 至 1948 年，华罗庚为美国普林斯顿高等研究院的访问学者，并在普林斯顿大学讲授数论．1948 至 1950 年，华罗庚为依利诺大学教授，并指导了几个学生做研究（包括爱尤伯(R.Ayoul)，密锡尔(J.Mitchell)与熊飞尔德(L.Schoenfeld))．除数论之外，华罗

庚也在有限域的不定方程,典型群与体论方面工作.

1950 年，华罗庚携妻子与子女一道回国．由于中央研究院数学研究所已随蒋介石政府搬去台湾，所以华罗庚立即投身于筹建中国科学院数学研究所的工作．1952 年，数学所正式成立时，华罗庚被任命为所长．他立即投身于研究所的重建工作，研究所包括几个纯粹数学与应用数学的研究室及计算技术部门．他特别致力于年轻数学家的培养，其中数论方面有陈景润，潘承洞与王元，代数方面有万哲先及复分析方面有龚升与陆启铿．为了更多的中国数学家受益，华罗庚写了一系列书：《堆垒素数论》（中文版，1957 年），《数论导引》（中文版，1957 年），《多复变数函数论中的典型域的调和分析》（1959 年）《指数和的估计及其在数论中的应用》（中文版，1963 年），《高等数学引论》（1963 年），与《典型群》（1963 年，与万哲先合作）.

1966 年，“文化大革命”中，华罗庚受到冲击，他的家遭到“红卫兵”的搜查，华罗庚的手稿被盗而且始终未被找到．但由于毛泽东与周恩来对他的保护，华罗庚的个人处境在 1967 年变得好了一些．他可以安全地呆在家里，甚至在国内各工业部门去普及数学方法.

1958 年，华罗庚被任命为中国科学技术大学副校长，并开始应用数学工作，特别将数论方法用于高维数值积分法．同时，他还从事“优选法”（斐波那契（L.P.Fibonacci）方法）与“统筹法”（关键路线法）在工厂与工业部门的普及工作．在近二十年中，他与他的助手陈德泉与计雷去过二十几个省，给工人作报告并教导他们如何将上述两个方法用于他们的工作．从而工厂的产量增加了，产品的质量也提高了.

1976年，“文化大革命”结束了．中国从 1979 年开始执行开放政策．由于他的学生的协助，华罗庚发表了两本书：《数论在近

似分析中的应用》（1978 年，与王元合作）及《从单位圆谈起》（1979 年）．由哈贝尔斯坦（H.Halberstam）编辑的华罗庚论文集于 1983 年由斯普林格出版社（Springer-Verlag）出版．华罗庚于 1978 年被任命为中国科学院副院长，1980 年被任命为应用数学研究所所长．从 1953 年至 1983 年，他连续被选为中国数学会理事长．

在中国实行开放政策之后，华罗庚得到兰西（Nancy）大学（1980），香港中文大学（1983）与依利诺大学（1984）名誉博士学位，他被选为美国科学院国外院士（1983），德国巴伐利亚科学院院士（1983）及第三世界科学院院士（1983），尽管华罗庚的健康欠佳，他仍从事数学及其推广工作，而且以学者身份多次访问欧洲、美国与日本．1985 年 6 月 12 日，华罗庚在日本东京大学演讲完之后，由于心脏病突然发作而去逝．

数学工作

一、数论

1．三角和的估计．

命 q 为一个正整数及 $f(x)$ 为一个整系数多项式

$$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x,$$

此处 $(a_k,\cdots,a_1,q)=1$．考虑完整三角和

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e(f(x)/q),e(x)=e^{2\pi ix}.$$

若 $f(x)=x^2$，则 $S(q,x^2)$ 为熟知的高斯和，高斯证明了

$$|S(q,x^2)|\leqslant\sqrt{2q}.$$

$S(q,f(x))$ 的估计是一个历史悠久的问题，在华罗庚之前只处理了一些特殊的多项式，更精确地说，他用一个很优美的方法证明了

$$|S(q,f(x))|=O(q^{1-\frac{1}{k}+\epsilon}),\tag{1}$$

此处 ε 为任何给定正数及与 O 有关的常数仅依赖于 k 与 ε，这一结果是 1940 年[49A]中给出的．早在 1938 年，他已在[38]中得到较弱的结果，其中与 O 有关的常数依赖于 $f(x)$ 的系数，易于证明除因子 q^{ε} 尚可能改进外，(1)是臻于至善的．例如，当 p 为除不尽 k 的素数时有 $|S(p^k, x^k)| = p^{k-1}$．以后，华罗庚[100]又将估计(1)推广至次数为 n 的任意代数数域 K．

对于非完整三角和，华罗庚[119]证明了，当 $(k, q) = 1$, $b \neq 0$ 时，

$$\sum_{x=1}^{P} e\left(\frac{hx^k + b}{q}\right) \leqslant c(k, \varepsilon) q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(q, b), \tag{2}$$

这一结果对华林问题有重要应用．

华罗庚简化与改进了维诺格拉朵夫关于韦尔(H. Weyl)和的估计方法，他[95]指出这一方法的核心为下面的中值定理：命

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

及

$$C_k = C_k(P) = \sum_{x=a+1}^{a+P} e(f(x)).$$

若 $t_1 = t_1(k) \geqslant k(k+1)/4 + lk$，则

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2t_1} \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_k$$

$$\leqslant (7t_1)^{4t_1 l} P^{2t_1 - \frac{1}{2}k(k+1)+\delta} (\log P)^{2l},$$

此处 $\delta = \frac{1}{2}k(k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^l$．由此立即推出下面的定理：假定 $k \geqslant 12$, $2 \leqslant s \leqslant k$ 及

$$\left|\alpha_n - \frac{h}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, (h, q) = 1, 1 \leqslant q \leqslant P^r,$$

则当 $P \leqslant q \leqslant P^{r-1}$ 时有

$$S = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)) \ll P^{1-\frac{1}{\delta_k}+\varepsilon},$$

此处 $\delta_k = 2k^2(2\log k + \log\log k + 3)$．

在所有当今解析数论的专著中，都是按照华罗庚的方法来阐述维诺格拉朵夫方法的．例如，R.C.Vaughan, The Hardy—Littlewood Method, Caml Tract in Math;80,1981．

关于特征和，华罗庚[61]于1942年证明了对于非主特征$\chi \bmod p$有：

$$\frac{1}{A+1}\left|\sum_{a=1}^{A}\sum_{n=a}^{a}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{p}-\frac{A+1}{\sqrt{p}},1\leqslant A\leqslant p.$$

这一估计导致了$\bmod p$的最小原根及Pell氏方程最小解的估计的改进［62］．

2．华林问题及其有关的问题．

1770年，华林猜想，对于整数$k\geqslant 2$，存在仅依赖于k的整数$s(k)$使每一正整数皆可以表为s个非负整数的k次方幂之和．华林猜想是希尔伯特（D.Hilbert）于1900年证明的．在20年代，哈代与李特伍德（J.E.Littlewood）发展了堆垒数论中的强有力的新方法——圆法．这一方法将给出华林问题更精密得多的结果．命$G(k)$表示最小的s使每一充分大的整数N皆可以表为

$$N=x_1^k+\cdots+x_3^k, \tag{3}$$

此处x_1，…，x_3为非负整数，哈代与李特伍德建立了（3）的解数$r_{s,k}$（N）的渐近公式：当$s\geqslant(k-2)2^{k-1}+5$时有

$$r_{s,k}(N)\sim\mathfrak{S}(N)\frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s/k)}N^{s/k-1}, \tag{4}$$

此处$\mathfrak{S}(N)$称为奇异级数，它有一个独立于N的正下界，所以$G(k)\leqslant(k-2)2^{k-1}+5$．华罗庚［36］于1938年将这一结果改进为

$$G(k)\leqslant 2^k+1.$$

同时，他也证明了当$s\geqslant 2^k+1$时，$r_{s,k}(N)$的渐近公式成立．在这些工作中，需用到以后所谓的华氏不等式：

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e(\alpha x^k) \right|^{2^k} d\alpha \ll P^{2^k - k + \varepsilon}. \tag{5}$$

无论如何，对于大的 k，维诺格拉朵夫（见维诺格拉朵夫 [5]）给予哈代与李特伍德关于华林问题的结果以巨大的改进. 他证明了当 $k>10$，$s \geqslant 10k^2 \log k$ 时，（4）式成立，而华罗庚将此改进为 $k>10$，$s \geqslant 2k^2(\log k+\log\log k+2.5)$. 可能有兴趣者为对于小的 k，华罗庚关于（4）的条件 $s \geqslant 2^k+1$，直到近年才由沃恩（R.C.Vaughan）与希斯—仆朗（D.R.Heath-Brown）分别改进为 $s \geqslant 2^k$（$k \geqslant 3$）与 $s \geqslant \frac{7}{8}2^k+1$（$k \geqslant 6$）. 基于希尼尔曼（L.G.Schnirelman）关于自然数贯的密率方法，林尼克于 1943 年给希尔伯特定理一个新证明. 达文坡特在评论这一证明时写道"这一证明的想法无疑受到哈代与李特伍德方法某些性质的启发，特别是华氏不等式."

在 30 年代，很多数学家研究了将 x^k 换成一个 k 次多项式的华林问题的推广. 这种推广的主要困难是由于华罗庚的估计（1）而得到克服，他得到希尔伯特定理一个非常一般的表述. 命 $f_i(x)$($1 \leqslant i \leqslant s$)为 s 个正首项系数 k 次整值多项式，在 1937 年至 1940 年之间，华罗庚证明了方程

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s)$$

的解数，当 $s \geqslant 2^k+1$（$1 \leqslant k \leqslant 10$）及 $s \geqslant 2k^2(\log k+\log\log k+2.5)$（$k>10$）时，有一个渐近公式. 注意在此并未考虑奇异级数的正性. 命 $f(x)$为一个整值多项式及 $G(f)$表示最小的整数 s 使对于充分大的 N，方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

有解. 命 $\partial^\circ f$ 表示 f 的次数. 华罗庚在 1940 年证明了 $G(f \mid \partial^\circ f=3) \leqslant 8$，$G(f \mid \partial^\circ f=k) \leqslant (k-1)2^{k-1}$ 及 $\max_f G(f) \geqslant 2^k-1$($k \geqslant 5$)，此处 f 过所有 k 次整值多项式.

圆法的要点可以简单叙述如下：(3) 的解数可以表示为积分形式

$$r_{s,k}(N)=\int_0^1 T(\alpha)^s e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha,\ T(\alpha)=\sum_{x=1}^{P} e(\alpha x^k),$$

此处 $P=[N^{1/k}]$. 将单位区间[0,1]分成两部分，即优弧 M 与劣弧 m；粗略地说，M 包含那些小分母 q 的有理数 h/q 为中心的一些互不相交的区间之并，而 m 为 M 关于(0,1)的余集. 哈代与李特伍德证明了当 $s\geqslant 2k+1$ 时，渐近公式

$$\int T(\alpha)^s e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha\sim\mathfrak{S}(N)\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)/\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)N^{\frac{s}{k}-1}$$

成立. 华罗庚[120]于 1957 年将这一结果改进为 $s\geqslant k+1$. 华罗庚的结果的证明基于估计式(2)，而且是臻于至善的.

在 30 年代与 40 年代，华罗庚系统地研究了所谓华林—哥德巴赫(C. Goldbach)问题. 这是关于(3)及其推广的可解性问题，其中诸 x_i 需限制取素数. 例如他证明了，当 $s\geqslant 2^k+1\ (k\leqslant 10)$ 及 $s\geqslant 2k^2(\log k-\log\log k+2.5)\ (k>10)$时，方程

$$N=p_1^k+\cdots+p_s^k$$

的解数有一个渐近公式. 他也证明变数取素数时与上述结果相类似的一些结果，他的研究成果含于他的名著《堆垒素数论》中.

塔内 (G. Tarry) 问题.

命 N (k) 表示最小的整数 t，使方程组

$$x_1^h+\cdots+x_t^h=y_1^h+\cdots+y_t^h,\quad 1\leqslant h\leqslant t \tag{6}$$

有一个非寻常解，即 x_1，…，x_t，y_1，…，y_t 为正整数，但 x_1，…，x_t 不是 y_1，…，y_t 的置换，命 M (k) 为最小的整数 t，使 (6) 有解而且

$$x_1^{k+1}+\cdots+x_t^{k+1}\neq y_1^{k+1}+\cdots+y_t^{k+1}.$$

显然我们有$k+1\leqslant N(k)\leqslant M(k)$. 华罗庚[37]于 1938 年用一个初

等的直接法证明了，当 $k\geqslant 12$ 时，

$$M(k)\leqslant(k+1)\left(\left[\log\frac{1}{2}(k+2)/\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]+1\right)\sim k^2\log k.$$

这改进了早先锐特(E. M. Wright)的结果：$M(k)<7k^2(k-11)(k+3)/216$.

华罗庚［104］指出维诺格拉朵夫方法可以用来处理塔内问题，并于 1952 年用这一方法得到了下述结果：命 t_0 由下表给出：

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$k>10$
t_0	3	8	23	55	120	207	336	540	885	$[k^2(3\log k+\log\log k+9)]$

及 $R_{k,t}(p)$ 表示（6）适合 $1\leqslant x_i,\ y_i\leqslant P,\ 1\leqslant i\leqslant t$ 的解数，则当 $t>t_0$ 时，

$$\lim_{P\to\infty}P^{1/2k(k+1)\quad-2t}R_{k,t}(P)=c(k,t).$$

此处 $c(k,t)$ 为仅依赖于 k 与 t 的常数.

3. 对数论的其他贡献.

命 $q(n)$ 表示将一个正整数 n 分为无相等部分的分析数，或分为奇数部分的分析数，在 1942 年，利用哈代—拉马努扬（S. Ramauujan）方法及拉代马哈尔（H. Rademacher）的有限阶范里（J. Farey）分割，华罗庚［60］证明了

$$q(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\substack{k=1\\k\text{ odd}}}^{\infty}\sum_{\substack{(h,k)=1\\0<h\leqslant k}}\omega_{h,k}\, e\left(-\frac{hn}{k}\right)\frac{d}{dn}J_0\left(\frac{i\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(\left(n+\frac{1}{24}\right)\right)^{1/2}\right)\right),$$

其中 $J_0(x)$ 为 0 级 Bessel 函数.

命 $A(x)$ 表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 中格子点 (u,v) 数. 高斯原题为决

定最小的 θ 使对于任何正数 ε 皆有渐近公式

$$A(x)=\pi x+O(x^{\theta+\varepsilon}),$$

此处与 O 有关的常数依赖于 ε. 高斯证明了 $\theta=\frac{1}{2}$，蒂奇马什得到 $\theta=15/46$，华罗庚［63］于 1942 年将这一结果改进为 $\theta=13/40$，同时还指出维诺格拉朵夫关于这个问题的结果的证明中的错误.

华罗庚还研究了实二次域 Q（$\sqrt{d}$）的欧氏除法（EA）问题，此处 d 为一个平方自由数，他［64］在 1944 年证明了若 $d>e^{250}$，则没有（EA），并指出 250 可能改进至 160.

1959 年，华罗庚与王元［131］写了关于数值积分法一篇短文. 他们证明了，若 $\partial^2 f(x,y)/\partial x\partial y$ 在 $0<x,y\leqslant 1$ 上连续，则

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{1}{F_n}\left\{\frac{kF_{n-1}}{F_n}\right\}\right)\leqslant\frac{C\log 3F_n}{F_n}, \quad (7)$$

此处 F_n 为第一个 Fibonacci 数，除常数 C 外，估计（7）是最佳可能的. 然后，他们发表了一系列论文将他们的方法推广至高维空间. 熟知 F_{n-1}/F_n 是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\cos\frac{2\pi}{5}$ 的有理逼近，所以他们的方法的要点为利用分圆域 Q（$2\cos\frac{2\pi}{m}$）（$m\geqslant 5$）的一组单位构造域的基底的联立有理逼近. 他们的工作及对这一领域的其他贡献，包括 2 至 18 维的数值信息皆包含在他们的专著《数论在近似分析中的应用》之中.

在 1953～1957 年之间，华罗庚在中国科学院数学研究所组织了一个哥德巴赫问题讨论班. 哥德巴赫问题是哥德巴赫写给欧拉（L. Euler）的一封信中提出来的，信中建议了两个猜想：(A) 每一个大于 5 的偶数都是两个奇素数之和，及 (B) 每个大于 8 的奇数都是 3 个奇素数之和. 显然 (B) 是 (A) 的推论，1937 年，维诺格拉朵夫本质上证明猜想 (B). 实际上，他证明了每一充分大

的奇数都是三个素数之和．布赫夕塔布（A. A. Buchstab）证明了每一充分大的偶数都是两个数之和，其中每个数都是不多于4个素数之乘积．我们将这个结果简单记为（4，4）．作为讨论班的成果，王元首先于1956年将布赫夕塔布的结果改进为（3，4），于1957年继续改进为（2，3）．其后，潘承洞于1963年建立了（1，4）．最后，陈景润证明了（1，2）．除猜想（A）本身外，这是猜想可能的最好结果．

二　代数与几何

4．体．

自从哈密顿（W. R. Hamilton）关于非交换可除代数第一个例子之后，四元素代数与可除代数受到很大注意．相比之下，无穷维代数与体却被忽略了．1950年左右，华罗庚用直接与初等方法在这一领域证明了几个定理：

命 K 为一个体，若一个由 K 映射到自身的映射 σ 满足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma,\ (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \text{ 及 } 1^\sigma = 1,$$

则称 σ 为半自同构．熟知的半自同构的例子有同构，它满足 $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ 与反自构，它适合 $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$．一个著名的问题为是否存在一个半自同构，它既不是自同构又不是反自同构？华罗庚［88］于1949年解决了这个问题，他证明了每一个半自同构或为自同构，或为反自同构．由此可以导出特征≠2的体上直线的射影几何基本定理，即任何将特征≠2的体上的射影直线映射到自身且保持调和关系不变的一一对应为自同构或反自同构诱导的半线性变换．

过去安柯溪雅（G. Ancochea）与卡普兰斯基（I. Kaplansky）都仅能在某些限制下研究半自同构问题．由于他们所用的方法基于有限维结合代数的构造理论，所以他们都未能完全解决问题．1949年，华罗庚［71］给出下面定理的一个直接证明：体的每一个真正

规子体都包含在它的中心之中．这个定理在文献中被称为嘉当（H. Cartar）—布劳威尔（R. Brauer）—华氏定理．在华罗庚与布劳威尔的证明出现之前，嘉当用了体的伽罗华理论的复杂技巧，仅能对可除代数证明这一定理．而华罗庚的证明只需要一个恒等式：若 $ab\neq ba$，则

$$a=(b^{-1}-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1))(a^{-1}b^{-1}a-(a+1)^{-1}b^{-1}(a-1))^{-1}.$$

1950 年，华罗庚［96］证明了，若一个体不是域，则它的乘法群不是亚阿贝尔群．

5．群论与矩阵几何．

1946 年，华罗庚［73］发表了他的第一篇典型群自同构论文，其中他决定了实辛群的自同构，接着，他［85］在 1948 年又决定了特征不等于 2 的域的辛群自同构．华罗庚关于辛群自同构的方法也可以用于其他类型的典型群上去，但是由于狄厄多内（J. Dieudonne）已于 1951 年发表了他关于典型群自同构的结果，所以华罗庚［101］仅发表了用他自己的方法解决的狄厄多内尚未解决的一系列问题的结果：华罗庚［101］决定了 $GL_2(K)$，$SL_4(K)$与 $PSL_4(K)$ 的自同构，此处 K 为特征不等于 2 的体，及 $O_4^+(K, f)$ 的自同构，其中 K 为特征非 2 的体而 f 为指标为 2 的二次型，以后，华罗庚与万哲先［105］决定了 $SL_2(K)$ 与 $PSL_2(K)$ 的自同构，此处 K 为特征$\neq 2$ 的体，他们亦决定了某些线性群是不同构的．在［101］中，华罗庚阐述他的方法与狄厄多内方法的比较，他写道："狄厄多内用的方法对高维时是有效的，并可以对个别低维情况加以应用．如他所指出的那样，当维数 n 减小时，困难就加大了．狄厄多内的方法对于 n 小时，变得非常笨拙，有时还不能解决最小 n 时的情况．另一方面，笔者的方法从尽可能小的 n 开始，这常常是最困难的情况，而读者不难用笔

者 [85] 曾用过的方法从本文的特殊结果出发，用归纳法得出一般的结果．进而言之，相比于狄厄多内的方法，笔者只用了矩阵计算．"

1951 年，华罗庚与赖纳（I. Reiner） [102, 106] 决定了 $GL_n(z)$ 与 $PGL_n(z)$ 的自同构．这是环上典型群自同构工作的开端．他们[92]还证明了 $GL_n(z)$ 由三个元素生成，$SL_n(z)$ 由两个元素生成，而 $SP_{2n}(z)$ 由四个元素生成．以前布拉哈拉(R.R.Brahana)曾证明过 $SP_{2n}(z)$ 的每个元素都是一个有限矩阵集的元素之积．

1940 年，华罗庚与段学复 [46] 引进了 p－群秩的概念．若一个 p^n 阶 p－群的元素的最大阶为 $p^{n-\alpha}$，则称该群有秩 α．例如，华罗庚证明了，若 G 为阶 p^n 及秩 α 的群（$p\geqslant 3$，$n\geqslant 2\alpha+1$），则 (i) G 含且仅含一个阶 p^m 及秩 α 的子群（$2\alpha+1\leqslant m\leqslant n$）；(ii) G 包含阶为 p^m 巡回子群（$\alpha<m<n-\alpha-1$）；(iii) G 中阶 $\leqslant p^m$ 的元素个数等于 $p^{m+\alpha}$（$\alpha\leqslant m\leqslant n-\alpha$）．其中 (ii)，(iii) 分别改进了米勒（G. A. Miller）与库拉柯夫（A. A. Kulakoff）的结果．

矩阵几何的研究是华罗庚于 1945 年开始的，这一工作与西革尔（C. L. Siegel）关于分数线性变换的工作有关．空间的点为某种矩阵，例如同样大小的长方矩阵，对称矩阵或斜对称矩阵，然后在空间中有一个运动群．问题是用尽可能少的几何不变量来刻画运动群．华罗庚发现不变量"粘切"即足以刻画空间的运动群．他 [99] 于 1951 年证明了长方矩阵仿射几何的基本定理：命 $1<n\leqslant m$．若体 K 上 $n\times m$ 矩阵集合到自身的一一变换保持粘切（若 $M-N$ 的秩为 1，则两个矩阵 M 与 N 就称为粘切），则必具形式

$$Z_1=PZ^{\sigma}Q+R_1, \tag{8}$$

此处 $P=P^{(n)}$ 与 $Q=Q^{(m)}$ 为可逆矩阵，R 为一个 $n\times m$ 矩阵及 σ 为 K 的自同构．若 $n=m$，则除 (8) 之外，还需添加变换

$$Z_1 - PZ^{\tau}Q + R,$$

此处 τ 为 K 的反自同构. 由此可以推出长方矩阵（Grassmann 空间）射影几何的基本定理. 他还决定了特征≠2 的体上全矩阵环的 Jardam 同构与特征≠2，3 的体上全矩阵环的 Lie 同构.

矩阵几何的研究与他的多复变函数论研究非常接近. 在 1944 至 1946 年间，华罗庚［66，67］决定了在酉群之下，复对称与斜对称方阵的分类，在同余关系下，厄尔米（C. Hermite）矩阵的分类，及在正交群下，厄尔米矩阵的分类.

1955 年，华罗庚在数学研究所组织了一个代数讨论班. 他与万哲先合作发表了一本书《典型群》，包括他们在典型群及其有关问题的结果. 除了华罗庚研究过的领域外，讨论班的参加者也得到了代数其他部分及其应用，特别是代数密码学的一些结果.

三 复分析

6. 典型域.

1935 年，嘉当（E. Cartan）证明了在解析变换之下，既得齐次有界对称域正好六种类型，其中有两种例外域，它们的维数分别为 16 与 27，其他四类称之为“典型域”，它们的定义如下：

$R_{\mathrm{I}} = \{m \times n$ 矩阵 Z 满足 $I_m - ZZ^* > 0\}$,

$R_{\mathrm{II}} = \{n$ 阶对称矩阵 Z 满足 $I_n - ZZ^* > 0\}$,

$R_{\mathrm{III}} = \{n$ 阶斜对称矩阵 Z 满足 $I_n - ZZ^* > 0\}$,

$R_{\mathrm{IV}} = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in C^n;\ |zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0,$
$|\bar{z}z'| < 1\}$,

此处 Z 的元素为复数，I_m 表示 m 阶单位矩阵，Z^* 表示 Z 的转置 Z' 的复共轭，而 z' 表示矢量 z 的转置.

典型域可以看作是复平面上单位圆及其他区域的高维类似，典型域的理论也可以用于微分方程与复几何.

1943 年，西革尔发表了他关于辛几何的重要文章，其中用矩阵方法研究了 R_{II}．1944 年，华罗庚［66］指出典型域的研究可以归结为矩阵几何的研究．独立于嘉当与西革尔，他给出了四类典型域的矩阵表示与它们的运动群．在他的文章中，与西革尔工作相关的部分，他仅作了一个简单叙述，［66］中有一个编者注记："因为美国与中国间的邮件阻滞，在编辑的同意下，由华罗庚的朋友段学复与西革尔对本文作了一点小修改"．华罗庚在他的文章中亦表示了对韦尔、唐培经与陈省身的感谢．感谢他们分别赠送给他西革尔、吉尔劳德（G. Girauce）与嘉当的论文．

1953 年，华罗庚利用群表示论方法给出了四类典型的完整正交系，粗略地说，它们很像复平面上的正交系 $e(n\theta)(n=0,\pm 1,\cdots)$，由此而得到圆盘中的 Cauchy 核．因此利用这些完整正交系，华罗庚得到了四类典型域的 Cauchy 核，Szego 核，Bergman 核与 Poisson 核．华罗庚的方法的特点为具体与直接，他很有信心地作极复杂的计算而得到清晰的结果．利用典型域的 Cauchy 核，若函数值在一个低维流形（特征流形）中给出，则解析函数在典型域中就确定了．这些结果与其他结果写进他的专著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》之中．英文版的编者强调了这个主题对 Lie 群表示论，齐型空间理论与多复变自守函数论的重要性．该书的显著特点为华罗庚所发展的数学技巧，例如，一类代数恒等式，矩阵变元的函数积分的计算等，都具有独特的兴趣．

利用典型域的 Poisson 核，华罗庚与陆启铿［128］于 1958 年建立了典型域的调和函数论并解决了关于 Laplace-Beltrami 方程的 Dirichlet 问题．他们发现一些奇怪现象：(i) 若一个函数适合一个微分方程，则必适合一组微分方程，及 (ii) 若函数值在典型域的边界的一个低维流形（特征流形）上给出，则 Dirichlet 问题就解决了．华罗庚发现一系列微分算子，它们有调和算子类似性质，现在

文献上称之为华氏算子．陆启铿还研究了典型域的边界性质，几何结构，最大原理及证明了 C^n 中有界区域的类似 Schwarz 引理．

由于某些典型群可以看作典型域的特征流形，华罗庚［139］证明了酉群上的 Fourier 级数可以 Abel 求和，这是典型群上 Fourier 分析研究的开端．华罗庚的工作被龚升大大地拓广了．龚升研究了酉群上 Fourier 级数的 Abel 求和法，Cesaro 求和法，Fejer 求和法与各种球求和法．钟家庆将酉群上 Fourier 级数的某些结果推广至旋转群．

1954 年，华罗庚［122］用初等方法证明了有界区域的 Bergman 度量的 Riemann 曲率 R 具有性质：(i) $2-R$ 为平方和，及 (ii) 在某些限制下 $R \geqslant -n$．这是富克斯（W. H. I. Fuchs）定理的改进．作为 Riemann 共形映照定理的推广，华罗庚证明了每一个有常曲率的非连续有界区域可以由解析映射映射到单位球．

华罗庚用他多复变函数论的工作去研究偏微分方程的某些问题．这些写于他的书［8］及他与吴兹潜和林伟合著的书［10］之中．（以上参考文献见华罗庚：Selected papers，Springa Verlag，1983）

参考文献

[1] H. Davenport, Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalihco, Ann Arbor publisher, 8. 1962.

[2] H. Halbers tam, Loo-Keng Hua: obituary, Acta Arit; 1988, 99～117.

[3] 龚升与陆启铿（S. Gong and K. Q. Lu）. Function Theory, 见 Loo-Keng Hua: Selected papers, Springa-Verlag, 1983.

[4] S. Salaff. A biography of Hua Lo-Keng, Sci. and Tech. in East Asia, Sivin Nathan (ed.) Watson Acad. publ. Inc. 1977.

[5] 万哲先（Z. X. Wan）. Algebra and Geometry, 见 Loo-King Hua: Selected papers, Springer-Verlag, 1983.

《华罗庚科普著作选集》介绍*

一

中国古代数学曾有过极为光荣的传统与贡献．由于我国长期处于封建社会，而西方已进入资本主义社会，我国的数学落后了．我国现代的数学研究是本世纪 20 年代开始的．华罗庚教授是中国解析数论，典型群，矩阵几何学，自守函数论与多个复变数函数论等很多方面研究的创始人与开拓者，也是我国进入世界著名数学家行列最杰出的代表．迄今他共发表学术论文约二百篇，专著十本，其中有八本被国外翻译出版，有些可列入本世纪经典著作之列．他被选为美国科学院国外院士，法国南锡大学与香港中文大学授予他荣誉博士．他的名字已进入美国华盛顿斯密司—宋尼博物馆，也被列为芝加哥科学技术博物馆中当今八十八个数学伟人之一．外国报刊上征引了很多著名数学家对他的赞扬："由于他工作范围之广，使他堪称世界名列前茅的数学家之一"（劳埃尔·熊飞尔德），"他是绝对第一流的数学家，他是作出特多贡献的人"（李普曼·贝尔斯），"受他直接影响的人也许比受历史上任何数学家直接影响的人都多，他有一个普及数学的方法"（罗兰德·格雷汉），等等．这些绝非溢美之词，他是当之无愧的．

---

* 这是为《华罗庚科普著作选集》写的介绍，附于书中，上海教育出版社出版，1984．

本文不准备介绍他的学术成就，有兴趣的读者可以参看最近斯普林格出版社出版的《华罗庚论文选集》及他的一些著作．但是，华罗庚教授不仅是一位卓越的数学家，他对组织领导工作、教育工作、普及工作也作出了出色的贡献．特别是他多年来从事应用数学的研究与推广工作，收效极为丰富，影响甚为深远．本文将就这些方面作一些简略的介绍．

二

正当他年富力强，风华正茂，创作处于最高潮的时刻，中国新民主主义革命成功了．中华人民共和国成立的消息很快传到了美国．他毅然放弃了伊利诺大学终身教授席位，于 1950 年带领全家回到北京．那时帝国主义封锁我们，旧中央研究院数学所的图书馆又搬到台湾去了，他就在这个时刻担当起中国科学院数学研究所所长职务，负责新建数学所的重任．在这样艰难的工作与生活条件下，以他为核心与榜样，数学所上下团结一致，艰苦工作，不到五年，就初具规模，涌现出一批出色的成果与人才，受到国内外的高度赞扬．这与他卓越的领导是分不开的．

他深知培养中国青年数学家的重要．解放后，他始终抓紧这项工作，不仅向他们传授数学知识和治学方法，更注意教育他们热爱祖国和人民，教育他们有良好的学术品德和作风．

他的宝贵治学经验只有较少一些已写成文章发表，特别在 60 年代以后，他很少有时间再去撰写这方面的文章，这是很可惜的．

早在 50 年代初，他就提出"天才在于积累，聪明在于勤奋"，虽然他聪明过人，但他从不夸耀自己的天分，而是把比"聪明"重要得多的"勤奋"与"积累"看做两把成功的钥匙，反复告诉青年人，要他们学数学做到"拳不离手，曲不离口"，经常地锻炼自己．

当时他领导的两个数论讨论班，一个是基础性的，由他每周讲

一次，讲义交给学生分别负责仔细阅读，反复讨论后再定稿．另一个是哥德巴赫问题讨论班，由学生轮流报告，每一点疑难，他都要当场追问清楚，学生常常被挂在黑板上下不了台．在节假日，他还常到宿舍找学生谈数学问题．除此而外，他还领导了代数学与多个复变数函数论的研究工作．对全所的研究工作，他都亲自过问．在不到五年的时间里，受他直接领导而很好成长的学生就有越民义，万哲先，陆启铿，龚升，王元，许孔时，陈景润，吴方，魏道政，严士健与潘承洞等．这些人现在都成为教授了，是我国数学界的骨干，有些已是国际知名数学家．受过他影响的数学家更是不胜枚举．

其实早在 40 年代，他就在昆明西南联大领导了一个讨论班，在讨论班中受到教益而成为著名数学家的有段学复，闵嗣鹤，樊畿与徐贤修等人．

50 年代中期，他又提出“要有速度，还要有加速度”．所谓“速度”就是出成果，所谓“加速度”就是成果的质量要不断提高．这是针对当时数学所已经出了一批成果，有些人有自满情绪，写了一些同等水平的文章．他这一意见，正是针对这种倾向，鼓励大家千万不要自满，要继续攀登高峰．

在治学方面，他总是不吃老本，永远向前看．当他成为世界著名数论学家时仍不停步，宁可另起炉灶，研究新领域代数学与复分析．到他老年时，还勇敢地接触新的数学领域，如近似积分与偏微分方程等．他要大家不要“画地为牢”，要抓紧机会学习别人的长处与锻炼自己．特别他提出了“专”与“漫”的关系．首先要专，使研究工作深入，然后必须注意从自己的专长出发，向有关方面漫出去，扩大研究领域．

十年浩劫中，受了林彪、“四人帮”的毒害，一些人包括青年人中不良学风颇为盛行．表现在粗制滥造，争名夺利，任意吹嘘．

这些作风，使他深感痛心．1978 年，他语重心长地提出“早发表，晚评价”．后来又提出“努力在我，评价在人”．自然科学的成果，常需经时间检验，才能逐渐清楚其价值，刚一发表就吹嘘，本身就是违反科学的客观规律的．

他对自己的要求比对其他人更严格了．当他以古稀高龄到西欧与美国讲学时，他向自己提出“弄斧必到班门”．意思是到一个单位去演讲，最好讲该单位专长的内容，这样才能得到更多的帮助．

他深知年龄是不饶人的．在 1979 年，他指出：“树老易空，人老易松，科学之道，戒之以空，戒之以松，我愿一辈子从实以终，这是我对自己的鞭策，也可以说是我今后的打算．”

他正是以“实”与“紧”要求自己，即使在卧病之中，仍然坚持工作，并且说：“我的哲学不是生命尽量延长，而是工作尽量多做．”

三

当然，能够在华罗庚教授身边工作，承受他的身教与言教的学生总还是极少数人．早在 50 年代，他就注意发现社会上的卓越人才．陈景润就是他发现并推荐到数学所工作的．他是由于见到陈景润对塔内问题有些见解，而看出陈景润是一个可造就的人才的．这件好事情，居然使他在历次政治运动中受到错误的批判，说他重视“只专不红”的人，使他无法再作推荐人才的工作．

他是我国在中学进行数学竞赛活动的热心创始人、组织者与参加者．50 年代北京的历次数学竞赛活动，他都参与组织，从出试题，到监考，改试卷都亲自参加，也多次到外地去推动这一工作．特别在竞赛前，他都亲自给学生作报告，作为动员．他写的几本通俗读物《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的“神奇妙算”谈起》、《数学归纳法》等，都源出于当时的报告．这

些报告不仅是传授知识，富于启发性，更重要的是这些报告都是极好的爱国主义教材．杨辉、祖冲之都是我国古代的卓越数学家，“神奇妙算”是《孙子算经》中的光辉篇章，《数学归纳法》中有一个李善兰恒等式的证明．这还有个故事，当匈牙利数学家保尔·吐朗来北京访问时，曾讲了这个恒等式，并用兰向达多项式等高深知识，给出了一个证明．中国人难道不能给他们祖先提出的问题一个数学证明吗？他连夜思考，终于在与吐朗临别时，给了他一个非常初等、漂亮的证明．这些书一版再版，在青年中广为流传，是他们最喜欢的课外书籍之一．

他撰写《数论导引》、《典型群》与《多个复变数典型域上的调和分析》的同时，曾引导一些青年人进入数学研究领域，使他们成为很好的数学家．从 1958 年开始，他到中国科学技术大学数学系授课，由王元任助手．他计划撰写四卷《高等数学引论》，作为近代数学的基础丛书．可惜只出版了一卷半，手稿都在十年浩劫中丢失了．

在教课过程中，他非常注意教学改革．他提倡启发式教学，强调数学各分科之间的内在联系．因此基础课统一成一门课，共三年半时间，这种体系被称为“一条龙”．他还特别强调理论联系实际．例如在讲到用有理数贯逼近实数时，当给了实数，如何构造有理数贯？他介绍了“连分数”，连分数在天文学上的一系列应用也就顺带讲了．“数值积分”到底用到哪里去？我们向地理学家与地质学家请教，学会了不少实用的有效方法，他从理论上对这些方法加以总结提高，弄清了他们之间的关联与误差估计．这些成果总结于《关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题》之中．在中、小学数学课中，学习的都是“离散性的数学”，但大学一开始学习的微积分就是“连续性数学”，容易造成一个错觉，即“连续性数学”比“离散性数学”更优越或更能解决问题．在文章《有限与无

穷，离散与连续》中，用一系列生动的例子说明了“离散性数学”的重要性，特别指出，本来是离散性的数学问题，最好采用离散性方法来处理．文章发表后二十年的数学发展表明，离散性数学方法在应用数学中的重要性已经日趋显要．这充分表明他当时的见解是有深刻预见性的．

四

早在 50 年代初，华罗庚教授就热情地倡议并支持应用数学的发展，使数学能更好地为社会主义建设服务．数学所刚成立，他就建议并在数学所中成立电子计算机研制小组与力学研究组，为我国培养了这些方面的研究骨干．他还建议将微分方程与概率论作为中国数学发展的重点，以此作为数学应用的“触角”．

1958 年，他倡议在我国工业生产中，推广使用运筹学中的数学方法，并亲自和他的学生越民义，万哲先，王元等一起，走出研究所，到我国运输部门从事运输问题中的数学方法的普及工作．推广与应用线性规划中的数学方法，一度曾在北京市与山东省形成了群众运动，但由于这些方法使用的范围有限，计算也比较复杂，所以这些方法在中国至今主要还是在少数部门，例如运输部门中推广使用．

早在 1958 年，他就倡议在制订国民经济计划时使用“投入—产出法”，他不仅宣讲这一方法，并进行了深入的研究，他还讲授了与这一理论相关的非负元素矩阵理论，并指出某些理论上的重要结果在经济学上的重要意义．

这一期间，他千方百计地探索着数学为经济建设服务的途径．在《大哉数学之为用》一文中，他从各个方面，精辟地阐述了数学的用途．他又以非常通俗的语言，在总标题为“数学的用场”的一系列小品文中，介绍了一些有用的数学方法，登在《人民日报》

上．他还提出近似计算多重积分的新思想，他的想法现在已发展成为系统的理论，受到国内外的高度评价．

在中国工业部门真正很好地进行普及数学方法的工作，是1965年重新开始的，一直延续到现在．这段工作时间最长，工作量最大．他精辟地总结了这些年来从事普及数学方法工作的经验．他提出并解决了普及数学方法的目的、内容及方法，也就是他所说的“三条原则”，即（1）为谁？（2）什么技术？（3）如何推广？“为谁?”是一个指导思想问题．他指出：“无穷维空间对一个数学家来说很引人入胜，但对工人来说，他不关心这一点．他希望尽快地找到砂轮或锡林的平衡位置．因此搞普及工作，首先要找到讲者与听者间的共同目标．有了共同目标，就能为产生共同语言打开道路”（见本选集《在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会》）．

首先建立了以华罗庚教授为首的普及数学方法小分队，他的学生陈德泉与计雷为主要队员．他们二人一直跟他一起东奔西走，协助他做了很多工作．这期间，他的学生李志杰，那吉生，裴定一也较多地协助了华罗庚教授的工作．

华罗庚教授选择了以改进生产工艺问题的数学方法为内容的“优选法”与处理生产组织与管理问题为内容的“统筹法”作为普及工作的内容．这两大类方法又简称为“双法”．在浩如烟海的应用数学文献中，找出适合中国这样一个有众多小工厂，工业水平比较落后的国家中普及应用的数学方法，而且又要讲得通俗易懂，使中国广大的普通工人都能听懂，能运用，这本身就是非常困难的事．为此他撰写了《优选法评话及其补充》与《统筹法评话及补充》两本科普读物，以极为深入浅出的方式讲述了这两个方法，深受广大中国工人的欢迎．计算起来，他从事数学方法普及所耗去的精力与时间，并不少于他作为第一流的数学家在纯粹数学几个领域

进行开拓性研究所耗的精力与时间．当然，在近二十年中，他仍利用点滴时间从事数学理论工作．对于他接触过的应用数学方法，他总是认真研究它们的理论及严格的数学证明．

从 1965 年开始，华罗庚教授及其小分队到过中国二十多个省、市或自治区的几百个城市，几千个工厂，给几百万工人及技术人员讲过课，使他们学会“优选法”与“统筹法”，并用于改进他们自己的工作．

小分队每到一个省，即到一个工厂或矿山所在地，把全省及外省的二百个左右的同志集合起来，举办约一周的学习班．除三、四次讲课外，都是小组讨论．讨论的内容主要为如何将“优选法”与“统筹法”应用于各人自己的工作，或当地的生产过程中去．一周后，他们即分别奔赴全省各工业单位，与各厂的领导、工人师傅与技术人员结合起来共同工作．在这个过程中，华罗庚教授总是轮流到全省各主要城市及工厂中去亲自指导，及时了解一些成功的经验及失败的教训．然后再召集其他城市的代表到某工厂或矿山现场去开会，学习这些经验，以便进一步改进自己的工作．因此他们的工作范围与领域很广．每到一个省，常常得到上万项成果，产生了巨大的经济收益，并能在小分队离开后，自己将“优选法”与“统筹法”用于以后的工作．

在各处奔走搞应用数学方法普及工作的时候，他常常在深夜唤醒他的助手共同研究数学的理论问题．例如，在乌鲁木齐，他得到了分圆域独立单位组的一些结果；在杭州，他得出了用 PV 数构造伪随机数列的方法；在哈尔滨时，他得到了用初等方法处理哥德巴赫问题主项的办法等等．这些成果都成为他在 1979 年以后去英国，法国，联邦德国，荷兰与美国等讲学的内容．他从来认为理论是基础，他之所以对应用有些成绩，得力于他多年的理论研究及坚实的数学基础与修养．

当然，普及数学方法的工作在中国取得这样的成功，与华罗庚教授本人在中国人民中享有的声誉是分不开的.

华罗庚教授将他普及数学方法的宝贵经验总结在他的论文《在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会》之中. 这一报告曾在第四届国际数学教育会议上作为全会报告之一. 这一报告还在伦敦数学会，美国数学会与西欧及美国很多大学与研究所报告过，受到高度赞扬. 目前已根据这篇报告扩充成专著，即将在贝尔克豪斯（波士顿）出版社出版.

五

应该指出，这三十多年来，他的各项工作都受到不应有的干扰破坏，致使他未能发挥更大作用. 从1958年开始，“左”倾思想与做法就不断地冲击着数学界. 他所领导的数论研究及关于哥德巴赫问题的研究被“批判”成“理论脱离实际的典型”，而被迫解散了，从那时开始，他已无法再继续领导数学研究所的工作. 他倡导的数学竞赛活动与撰写的介绍治学方法的文章，都被胡说成是所谓宣扬“封、资、修”的一套，而被迫中断了这些科普工作.

十年浩劫中，他的家更被“查抄”了好几次. 手稿散失殆尽，至今没有下落，使不少工作无法继续进行. 奇怪的是除手稿丢失外，其他东西并不少.

在他从事数学方法普及工作的二十年中，更有种种流言蜚语，甚至人身攻击，并且有人从中破坏，企图解散他领导的小分队，以致他在1975年患了严重的心脏病.

他的学生也因此遭到不同程度的攻击与迫害.

在这种情形下，即使在科研或科普方面作出一点点成绩来，又该是多么不容易啊!

这一切已经过去了，党的十一届三中全会给中国带来了美好的

前程，我们深信他在古稀之年还会作出更出色的贡献.

六

在这本选集中，搜集的都是正式发表过的著作.他还有大量未发表的著作与手稿，可惜都在十年浩劫中丢失了.例如不少人见过的至少就有《投入—产出法》与《运输问题中的数学方法》手稿，都是1960年前后写成的.特别在近二十年中，他从事应用数学方法普及工作，在各地作了大量生动而有启发性的演讲，都没有正式发表."优选法"与"统筹法"在工业生产中具体问题的应用的大量出色经验，也没有写出来.这些材料都只能在以后陆续搜集出版.

参考资料

关于华罗庚教授的生平与事迹，国内报刊上曾发表过很多文章加以介绍，在此就不列举了.仅举几篇国外发表的文章于后.

[1] Lowell Schoenfeld, A Biographical Note on Professor Loo－Keng Hua, Notices of the AMS, 7, 1959, 729～730.

[2] Stephen Salaff, A Biography of Hua Loo Keng, Science and Tech. inEast Asia, Sivin Nathan edited, Watson Acad. Publ. Inc; 1977, 42.

[3] Gina Bari Kolata, Hua Loo Keng Shapes Chinese Math., Science, 210, 1980, 412～413.

[4] Anita Feferman, Professor Loo－Keng Hua on Tour, San Francisco Sunday, March, 15, 1981. 18～22.

[5] Loo－Keng Hua, Selected Papers, Springer－Verlag, 1983.

《华罗庚科普著作选集》首发式上的讲话*

同志们：

上海教育出版社编辑出版的《华罗庚科普著作选集》已经正式出版了．由于这本书的重要性，上海教育出版社在今天隆重举行赠书仪式．我想告诉大家一下，今年正好是华老七十五岁寿辰，又是他第一篇文章发表的五十五周年，也就是他从事科研、教学与科普工作的五十五周年，有关的单位还会组织有意义的纪念活动．前不久，华老又当选为政协副主席．这充分体现了党的尊重知识，尊重知识分子的政策，这一系列大喜的事件，我心中无比激动，我愿意代表本书的编辑部及他的学生、同事与朋友，向他致以衷心的祝贺．

一

华老是中国近代数学很多领域，如解析数论，典型群，矩阵几何学，自守函数论与多个复变函数论的创始人与开拓者，也是我国进入世界著名数学家行列的最杰出的代表．他共发表学术论文二百多篇，十本专著，其中有八本被国外翻译出版．自从我国实行开放政策以来，国外纷纷授予华老各种崇高荣誉，有美国科学院国外院

* 这是在1985年4月19日《华罗庚科普著作选集》首发式上的讲话．

士，第三世界科学院院士，德意志联邦共和国巴伐利亚科学院院士，法国兰锡大学，美国依利诺耶大学与香港中文大学荣誉博士等．在世界一些著名科技博物馆的数学馆中，都有着他的名字，例如美国的华盛顿司密斯宋尼博物馆，华老的名字与西革尔与盖尔芳德等在一起，在芝加哥科技博物馆中，他的名字列入现在还健在的88位数学家一起．今天我不准备谈华老的学术成就，我觉得最好是组织一个学术会议，并组织一系列学术报告来报告华老的成就及目前的发展．我本人也只了解华老学术工作的一部分，今天只介绍一下十一届三中全会后，华老的几本著作．

耀邦同志在给华老的信中，希望他写回忆录，把宝贵的经验留传下来，这一指示十分英明正确．他这几年，正在回忆整理他遗失的关于数理经济学的手稿．我认为除了他自己写外，他的学生也应把他的教导加以回忆整理．首先应该把华老已经发表的著作，加以整理出版．在这方面，西德斯普林格出版社是抓得很紧的．他们的总经理哥茨先生，每次来北京，必定千方百计索取华老的著作出版，特别有兴趣出版华老的学术著作，全集或选集．由于我参与了这项工作，跟哥茨先生多次会谈，可以说他们是做到了围着数学家转的．因此从十一届三中全会后的几年中，华老就在斯普林格出版社出了四部书，共约二千页．实际上，斯普林格出版社是想将《华罗庚文选》中包有他更多的著作．因《堆垒素数论》与《多个复变数典型域的调和分析》的英文版权属于美国数学会，斯普林格出版社愿意出高价买版权，而美国数学会则不肯卖版权而作罢．我第一次见到《华选》是前年春天去日本．每当我去东京，京都，广岛与仙台各大学时，数学家们都纷纷以极为尊敬的心情告诉我，他们见到了《华罗庚文选》，并带我到图书馆去看，后来又收到在美国工作的朋友的信，告诉我在他们的图书馆中有了《华选》，最近系统所两个人分别从西欧与东欧回来，也都告诉我，《华选》很有名，

众人皆知．其他三本书，也得到了高度评价．《数论导引》的中文版，马勒就写过评论．二十五年后，又出英文版．这本身就说明该书的材料是经过精选的．英国皇家学会会员海曼在评论《从单位圆谈起》时写道："这本书包括微分方程，群论，线性代数，微分几何，调和分析，复分析，绝大多数读者将可以发现他们所不知道的东西，绝大多数内容对我来说也是新的．"革罗斯瓦尔德在《数论在近似分析中的应用》一书的书评中写道："这本书是对数值积分，微分方程与积分方程求解方面最有价值的贡献．书中包括了很多材料是属于作者自己的，在很多情况下，书中建议的方法已导致最精密的结果，并具有最小的计算量．这本书的附录是有价值的，最后，这本书本身就是纯粹的抽象数论有实用价值的光辉范例．"在国外不少数学家的办公室里都能见到这些书，虽然他们并不一定都是搞这一行的．例如有人并不研究数论，但在读《数论导引》，他说："书写得太好了"．且不说内容，就以写作风格来说，华老是有独特风格的，那就是他说的"深入不易，浅出更难"．他从来不玩弄名词与定义，或故弄玄虚，而是深入实质，尽量少用名词与定义，以朴素易懂的形式写出来，使读者易于阅读与了解．

二

华老不仅是一位卓越的数学家，他对组织工作，教育工作及普及工作也作出了出色的贡献，特别他多年来从事应用数学的研究与普及工作，收效极为丰富，影响甚远，这方面的论述很丰富，遗憾的是有很多论述并未写出来．

上海教育出版社的赵斌同志，现在是上海市出版局副局长，非常热心于搜集华老这方面的著作．在他们的努力下，竟在一年左右，《华罗庚科普著作选集》就出版问世了．赵斌同志亲自搜集材料与校稿等，我最后校稿时，全书五百页，只找出几个小错，他这

样工作，跟他有清楚的认识与强烈的责任心是分不开的.

《华罗庚科普著作选集》搜集了三方面的内容：一、数学知识的通俗演讲，这几本书都是根据他对参加中学数学竞赛的学生的讲演撰写的. 二、关于治学经验的文章. 三、应用普及数学方法的著作. 他的这些著作在国内的青年学生与工人师傅中很受欢迎. 一经出版或再版，必抢购一空. 1982 年，我在新加坡，新加坡大学李秉彝先生送了我一本华老著《数值积分及其应用》，我一看是香港商务印书馆印的. 当时菲律宾马波亚大学的许炳南先生希望我能送他一本《统筹法评话》，回国后，我到处买都买不到. 不久前我重访了菲律宾，许炳南给我看了这本书及其他四本华老的通俗书，都是商务印书馆出版的. 他视若珍宝，他说："这些书，每本都可以开一个小课，如果要作为科普演讲，真够讲很多次了."《华罗庚科普选集》的出版，可以预料，在国内外会很受欢迎，在国际上，特别在东南亚一带也将产生很大的影响. 书中有些部分对专业的科技人员也是值得研究学习的. 书的第二部分，他讲了治学方法，都是经过深思的经验，有针对性，并带有深刻的哲理. 除 1979 年对科大研究生的一篇讲话外，都发表于 1951 年至 1962 年，以后有很多宝贵的经验都未能成文. 我把我所听到的，以个人体会的形式写在书前的"介绍"里. 例如 1978 年成都数学年会上，针对数学界中一些不良风气，华老指出"早发表，晚评价"，后来又提出"努力在我，评价在人"，这实际上指出了科学发展及评价科学工作的客观规律，即科学工作是要经过历史的检验才能逐渐了解其真实价值，这是不依人的主观意志决定的. 从这个观点出发，我们不要争奖金，更不要弄虚作假，不要浮夸. 在他古稀之年出国讲学，他把成语"不要班门弄斧"改成"弄斧必到班门"，苏老就很欣赏这个修改. 实际上，前一句话是要人隐含缺点，不要暴露. 华老出国讲演，到一个大学，是讲别人专长的，从而多得到帮助呢？还是讲别

人不专长的，从而把演讲变成形式上的东西呢？华老选择前者，这就是后一句话，"弄斧必到班门"．华老早在 1956 年《数论导引》的序言里就把搞数学比作下棋．下棋有个规则，那就是"观棋不言真君子，举手无悔大丈夫"，1981 年在淮南煤矿的一次演讲中，华老把这两句话改为："观棋有言真君子，举手有悔大丈夫"，意思是你看见别人搞的东西有毛病，一定要说，这才是真君子，另一方面，你发现你自己搞的东西有毛病，则一定要修改，这才是"大丈夫"．华老把他的话，常常总结成几句形象化的语言说出来，总之，他在这方面的论述贯穿了一个总的精神，就是要进取．

华老二十多年来，足迹遍于二十多个省市自治区，到过无数个工矿，基层单位推广"优选法"与"统筹法"，成效极为显著．在浩如烟海的应用数学文献中，如何找出适合中国国情的应用数学方法，并加以通俗化使一般文化水平不高的人可以了解，是十分困难的事．在"优选法"与"统筹法"的撰写中，他用的数学比过去的普及著作更少，而用折纸，摆零件，泡茶等比喻方法，并不失一般性地讲授了数学方法，这就更需要对问题实质有透彻的了解，才能达到这样深入浅出的境界．这二十多年来，华老在下面作的演讲太多了，可惜均未写成稿子，就只好留待跟他一起工作的同志来回忆补充吧！他以大数学家的身份，深入基层，跟群众结合，直接为国民经济服务，更是值得学习的．

现在这本书将作为共青团向全国青年推荐的书目之一，又将作为到香港的重点展览书目之一，我深信更多的人将会从中得到教益．

三

我国自从执行改革开放政策以来，经济建设及其他各方面都有了显著进步，这是举世公认的，但在一小部分人中却滋长着迷信外

国的思想，似乎外国一切都好．我在美国看过哥伦比亚大学的一个陈列馆，其中大部分展品都是中国古代文物．在华盛顿国家艺术博物馆中有齐白石、徐悲鸿的画，在日本京都，我又参观了一个博物馆，不少他们所谓的“国宝”，就是中国的经书，佛像等．我们是有悠久光辉的文化的．中国的科学技术总的说是比较落后的，但也有在世界上领先的，华老就是突出的一位．在这方面，我们要向日本学习，日本人对他们的数学前辈高木真治和小平邦彦是极为尊重的．他们的数学家出访，都把他们二人的著作作为珍贵礼品来赠送，例如他们代表团来我所就赠送过．我给日本杂志《科学》写过一篇通俗文章，他们问我稿费如何处理？我说买几本书给我好了，他们就给我寄来了高木真治的两本书与小平邦彦全集．我最近问一个大学生，“你的专业里中国的情况如何?”他说：“不行，我们的课程里没有中国人的东西，图书馆里找不到中国人的书，我不知道中国人干过什么?”实际上，大厅前面展出的华老的书，连数学所也不全，新作还缺少一本．华老在我们所当了三十多年所长，现在是名誉所长．我们所大部分人恐怕今天才第一次见到他的著作，特别是新作，更不说各大学了．现在复印技术发达，书能够销售一千本，算不错了．斯普林格出版社出版的华老的四本书，第一次订单即有五千多本，大部分是图书馆购买的，所以至少有几百个大学有这几本书，我们恐怕最多能在数学所凑它一套．当然原版书很贵，四本书约几百美元，但我们可不可以影印一下，让中国的每个大学来一套？让同学们走进图书馆就能看见中国数学家华罗庚的著作．他们自己会得出结论：世界上有几个这样优秀的数学家呢？他们自然会更加热爱我们的祖国．我们数学所以后要向国内外开放．这次会议之后，我们要把华老的著作加以陈列，让国内外数学家来我们所访问时能够见到，特别要用这些材料来教育与鼓励年轻的一代．以后，我们还要陆续搜集陈列我国其他有贡献的数学家的专著．我

们就是要热情歌颂中国数学家取得的成就，使人们增加信心，更加热爱我们的国家，努力奋斗．《华罗庚科普著作选集》也是贯穿着爱国主义教育的．第一部分的三本书就是分别根据孙子定理，祖冲之计算 π 与杨辉三角为主线而撰写的．

领导与群众都是很爱护华老的，但对他工作的细节不一定清楚，也不一定了解他的工作在国际上的影响．我们作为他多年的学生，是最了解情况的人．过去对华老的成就，宣传得不够，我们是有责任的，我认为最好的宣传就是出版他的著作及把他的科研，教学及普及工作继续下去．在这方面既需要做艰苦踏实的工作，也需要做宣传报道工作．过去只注意了前者，而忽视了后者．现在我们已迈出了第一步，在十一届三中全会以来，共出版了华老五部著作，共二千五百多页，还有些著作正在准备出版之中，我们还要继续出版华老更多的著作．今天再开这样一个会，我想主要是展示华老近年的成就，激发我们的爱国热情，增强我们的信心，更好地投身到科技体制改革与各项工作中去．

最后我愿意再一次代表本书编辑部，华老的学生，同事与朋友们祝愿他身体健康，工作顺利．

怀念华罗庚老师*

阴沉的天气，蒙蒙的细雨，阵阵的凉风，初夏的凄凉胜似深秋．当载有华老骨灰的专机徐徐降落在北京机场上，华老的长子华俊东手捧覆盖着中国共产党党旗的父亲的骨灰盒缓缓走下舷梯时，我才从恍恍惚惚中醒来：华老已离开我们了．

自从1973年华老心肌梗塞发作过一次后，身体虚弱多了．这几年，他意识到自己的时间已经不多了，只要身体还可以支持，就亲自到各地去普及数学方法，到国外去讲学．一有空隙，总是搞他的经济数学．三年前，他的病又复发了．医院不让同志们去探视，华俊东同意我以家属身份去看他几分钟．华老见到我说："王元，你来了，你看看桌子上写的是什么呀!"桌上压着一张不许探视的规定．他说："我还以为不行了呢，这次好得真快，过一天就可以搬到普通病房去了．"还说："我觉得那个数学问题搞得差不多了，有力气，我就躺着写几个字．"他写的一叠稿纸，乱得我都认不出来了．我不停地摇头，他懂得我的意思，说："王元，我的哲学不是生命尽量延长，而是工作尽量多做．"这几年，他写的诗词中也常有"马革裹尸还"这样的句子．华老正是用他的忘我工作实践着他的哲学．

五年前，有三个星期的时间，我与华老一起在美国访问．他对

---

* 原载《光明日报》，1985年6月22日．

我说："你们在困难的条件下，做了这么些工作是不容易的．在这里要理直气壮地讲，不要自卑．但对于工农群众，你千万不要看不起他们．"不久前，他当选为全国政协副主席．在记者招待会上，他说："我们要学习外国的长处，但外国也不是什么都好，我们也不是什么都不好，要分析，千万不要丧失民族自尊心！"这是多么语重心长的话语啊！华老对群众有着深厚的感情．记得美国数学家代表团访华时，对东北在林业开采上成功地使用统筹法很有兴趣，写信给华老，希望我国能写本书加以介绍．于是，华老把那里的工人与技术员请来商量，请他们作报告．华老不嫌他们文化水平低，认真听报告，听后还提出修改意见．事后，华老很激动地对我说："他们搞得真不错呢！"要有民族自尊心，要热爱人民，这是华老这几年对我的谆谆嘱咐与教导．

早在我初中时，我就听到过华罗庚这个名字．1947 年，当我在报上得知他的著作《堆垒素数论》在苏联科学院出版的消息，异常激动，我当时对爸爸、妈妈说："将来我要拜华罗庚为师．"他们笑笑说："他肯收你吗?" 1952 年，我在浙江大学毕业了．陈建功与苏步青老师推荐我来中国科学院，到华老的身边工作．临别时，陈老语重心长地对我说："你是我们嫁出去的'女儿'，好好跟华罗庚学习，他是中国最好的数学家．"想不到我小时候的一句玩笑话竟成了真的．

记得我第一次见到华老，心中很吃惊，怎么他这样年轻？是啊，当时华老才四十一岁．他写了一首诗，表示欢迎我们四个大学生来数学所工作．王寿仁将华老的诗抄了贴在墙上．我们表示愿意向华老学习，他笑而未答．不久，他考我一个题：如何将二次曲线化成标准型，并用矩阵表示出来．我当时未立刻答出．他说："怎么连这也忘记了．"过了一天，我把答案给他了．以后，我又做过几次他出的题目．一年后，我们新来的大学生要分到研究组工作

了. 他热情地对我说:“王元, 你跟我搞数论, 就这样定了吧.”从那时开始, 他的手稿, 常常先给我看看再发表. 遇有不同意见及他的笔误, 我总是向他提出来, 有时两人争得面红耳赤. 愈是这样, 我们的关系愈亲密. 那时, 他家就住在研究所旁边. 晚上或星期天, 有空他就来找我们谈数学, 弄得华师母吴筱元多次出来解围:“你老是抓住他们不放, 难道他们年轻人就没有自己的事吗?”我们以后三十三年的交往就是从这里开始的.

我的老师华罗庚*

我的老师华罗庚教授是我国现代史上杰出的数学家，他的名字已载入国际著名科学家的史册．他是中国科学界的骄傲，是中华民族的骄傲．在这里，我想就我所知，谈谈华老对数学的贡献与影响，他的治学经验与他的爱国主义崇高品德．

一

华老的科研工作是从数论开始的．很多数论重要问题的解决，都可以归结为某种三角和的估计．三角和的估计是近代数论研究的中心问题之一．高斯是这个领域的创始人，关于二次多项式对应的完整三角和就称为高斯和．高斯本人解决了它的最佳估计问题．经历了二百多年之后，才由华罗庚在 1938 年解决了任意多项式，系数为整数的一般完整三角和的最佳估计．这项工作在数论中有广泛的应用，华林问题推广中的主要困难就是依靠这条定理克服的．所以，最广泛的希尔伯特—华林定理首先是在华罗庚手中形成的．国际上称华罗庚的关于完整三角和的成果为“华氏定理”．例如 1971 年出版的苏联维诺格拉朵夫的专著《数论中的三角和方法》与 1981 年英国沃恩的专著《哈代—李特伍德方法》都以整章或相当

---

* 原载《中国科学院院刊》1986，79～83．这是在纪念华罗庚先生逝世一周年纪念会上的讲话的主要部分

篇幅记述了这条定理及其应用．1957 年，华罗庚应用怀依关于黎曼猜想的著名研究，得到了非完整三角和的精密估计，从而将华林问题的优弧部分做到最好程度，改进了哈代—李特伍德 1920 年的结果，国际称这项工作为“怀依—华不等式”．沃恩在他的书中，以整章论述了这一工作．1938 年，华罗庚关于三角和的积分平均估计，是处理低次华林问题的重要工具，国际上称为“华氏不等式”．除沃恩的书外，1960 年出的德文坡德的专著《丢番图方程与丢番图不等式》的第一章就是“外尔不等式与华氏不等式”．华罗庚关于维诺格拉朵夫方法的改进与简化工作，影响亦很大．他首先指出这个方法的核心为一个积分平均，华罗庚称它为维诺格拉朵夫中值定理．1950 年梯其玛奇的专著《黎曼 ξ-函数》，其中在论及维诺格拉朵夫方法时，就是采用华罗庚的形式．以后所有著作，包括帕拉哈、瓦尔菲茨、卡拉楚巴、沃恩等的名著中，都是按照华罗庚的形式来论述维诺格拉朵夫方法的．华罗庚的主要成果包括在其专著《堆垒素数论》中，这本书先后被译成俄、日、德、匈、英文出版，至今虽已四十年，仍为这方面研究所必需征引的文献．

华罗庚关于体论的工作，充分体现了代数的优美性．1949 年，他证明了“体的半自构必是自同构或反自同构”，这条定理去掉了体的半自构概念，由此可以证明特征$\neq 2$的射影几何的基本定理．1956 年，阿丁在专著《几何的代数》中记述了这个定理，并称之为美丽的“华氏定理”．1949 年，华罗庚证明了“体的每个真正规子体均包含在它的中心之中”．H. 嘉当最初证明这个结果时，用了复杂的伽罗华理论，并仅对可除代数加以证明．上述结果则是普芬威尔与华罗庚证明的，国际称为“嘉当—普芬威尔—华定理”．华罗庚关于典型群的工作有其特点，先解决低维问题，再用归纳法处理高维问题．相比于狄多涅从高维入手，不仅方法上更为初等，而且解决了用处理高维的方法不能解决低维问题的困难．华罗庚的工

作后由万哲先继续深入发展与丰富．矩阵几何学是华老开辟的研究领域，这些工作完成于 40 年代．

1935 年，E. 嘉当证明了共六类既约、齐次有界对称区域，其中四类称为典型域，二类是例外．1943 年与 1944 年，西革尔与华罗庚分别系统地研究了典型域．他们的工作侧重面有所不同，华罗庚证明了典型域的很多基本几何性质，西革尔关于自守函数论的专著中记述了华罗庚的结果．1953 年，华罗庚给出了四类典型域的贝格曼格与柯西核．特别是华罗庚首创用群表示论方法得到四类典型域的完整正交系，将它们加起来而得到柯西核．他把结果总结成专著《多复变函数论中典型域的调和分析》，先后被译成俄文与英文出版．这项工作有广泛的联系，英文版编者写道："这项工作不仅对函数论，而且对于李群表示论，齐次空间理论与多复变自守函数论都是重要的．"这项工作也是以夏皮罗为首的苏联复分析学派的工作起点（参看夏皮罗专著《自守函数论》）．

在典型域调和分析这项工作的基础上，华罗庚与陆启铿进一步研究了典型域的调和函数论，他们给出了典型域的泊松核，解决了调和函数的狄利克雷问题．在此过程中，华罗庚发现了一组具有调和算子类似性质的微分算子，国际上称为"华氏算子"．

在这些研究的基础上，华罗庚首先研究了诸如酉群这类典型群上的富利埃分析问题．首先给出了酉群的阿贝尔求和．这方面的工作，由龚升继续深入系统地发展与丰富．

1958 年，华罗庚提出利用分圆域的独立单位系来构造多重定积分的求积公式，这种公式是很精密与有效的，国际上称为"华王方法"．

在总结多年来工业生产与管理中普及数学方法的经验与教训的基础上，华老提出了适合中国国情的优选法与统筹法，对这些方法进行了改进及简化．他又提出了计划经济的数学理论——正特征矢

量方法.

华罗庚的科研工作，常常是发展自己的原始思想，有自己的方法，这一点对于生长并长期工作在发展中国家的数学家来说，尤为难得．华罗庚的数学著作，无论是解决经典问题，还是建立一个系统的数学理论，都贯穿着一种独特的风格，这就是使用直接方法．从他的写作特点上亦有这样的风格，从不玩弄名词，故弄玄虚，而是深入实质，语言朴素.

像华老这样数学研究领域广阔的数学家在世界上也很少．在硬分析即精密分析方面，他的成就受到哈代与维诺格拉朵夫的高度评价．在另一个绝然不同风格的数学领域——抽象代数方面，他的成就又得到阿丁的高度评价．国外报刊上高度赞扬华老成就的评价很多，其中征引了不少第一流数学家的话．自从我国执行开放政策以来，外国纷纷赠予华老种种荣誉头衔．如果他能和我们再多在一起几年，可以肯定，这些荣誉还会更多．在这里我不想介绍这方面的材料，而想谈谈他对学术评价的观点.

早在三十多年前，华老就说过："历史将严格地考验着每个科学家和每项科学工作．大量工作经过淘汰只剩下一点点，有时整个数学分支被淘汰了." 1978 年后，他公开提出："早发表，晚评价"，"努力在我，评价在人"等观点．上面列举的事实说明，华老的工作有的经历了三十年，有的经历了近半个世纪的考验．历史是无情的，但也是公平的，我相信华老是可以经得起历史考验的数学家.

二

华老的治学经验贯穿着一个总的精神，即不断进取的精神．他十九岁发表第一篇文章．二十岁发表的关于五次方程的第二篇文章，受到熊庆来先生的赏识，从而于 30 年代初来到清华大学．当

时的研究工作很活跃，但科研方向不集中．从1935年开始，致力于哈代—李特伍德—维诺格拉朵夫方法，即堆垒数论的研究，取得了系统深入的结果，写成专著《堆垒素数论》．这时候，这个方向已经成熟，华老说过："我如果继续搞三角和，大概顶多再写几篇好文章，也就结束了．"他不顾已经成为著名数论学家的荣誉，毅然放弃了数论研究，宁肯另起炉灶．从40年代开始，他进入代数领域工作，段学复是他当时的合作者，数论的合作者是闵嗣鹤．解析数论与代数是两个不同风格的数学领域，一个是精密分析，一个则要求漂亮简洁．他在体论、典型群、矩阵几何等方面取得了卓越成就，又开辟了自守函数与多复变函数论的研究，把分析与代数的技巧高度结合起来．可以说从30年代到50年代是他在理论数学研究上大力进行开拓工作的二十年．

新中国刚成立，他就回国了．除继续过去的研究工作外，他的工作重点转到了培养年轻数学家，致力于发展中国的数学事业．实际上，他把自己的研究工作愈来愈放到第二位来考虑．于1953年正式成立了数论组，他撰写了《数论导引》．后来又成立代数研究组，他与万哲先合写了《典型群》．后来又写《多复变函数论的典型域的调和分析》．他让学生们听讲，协助他修改讲义，使学生们受到了多方面的锻炼．这时期的学生有越民义、万哲先、陆启铿、龚升、王元、许孔时、陈景润、吴方、魏道政、严士健与潘承洞等．除他直接领导的三个组外，他还热情支持成立拓扑学、微分方程、概率统计、泛函分析与数理逻辑等研究室．特别在建所初期，就很重视应用数学与计算机研制工作，数学所设有力学组与计算机研制组，他对各方面都给予尽可能的关怀．他支持了他的老师熊庆来先生回国工作，使熊老晚年还能为中国数学作贡献，培养了杨乐、张广厚等学生．吴文俊是华老邀请来数学所主持几何学、拓扑学研究的．华老关心过冯康研究广义函数论；关心过关肇直、田方

增研究赋范环论；也支持了张宗燧、胡世华、吴新谋、张素诚、秦元勋、王寿仁等的工作．听过华老讲课而受益者有王光寅、丁夏畦、张里千、丁石孙、曾肯成等．陈景润则是华老出面调来数学所工作的．从 1958 年开始，华老的工作进一步转向以培养为中心．他为科技大学学生撰写了《高等数学引论》数卷，为研究生撰写了《从单位圆谈起》．一些研究生已成为我国数学界的中年骨干，如钟家庆、孙继广、冯克勤、陆洪文、裴定一、那吉生、徐伟宣等人．在这期间，华老又致力于对他不熟悉的应用数学做多方面探索，包括理论研究与到现场去普及线性规划．

从 1965 年开始，华老的工作又有了重大转折，决心将工作重点放到普及应用于工农业生产的数学方法上．他选择了以改进工艺为主的“优选法”与改善组织管理的“统筹法”来普及．为了让普通工人能明白，他对这两个方法作了简化，以最易懂的语言进行讲解．他写的两本小册子中几乎避免了数学语言．特别是他身体力行，不顾劳累和年老多病的身体，在近二十年的时间里，几乎跑遍了中国所有的省、市、自治区，到过无数的工厂，为群众教授数学，解决实际问题．二十年来，从没有动摇过他为国民经济建设从事数学普及工作的决心．陈德泉、计雷、李志杰、徐新红等是华老在这方面工作的助手．

他的一生就是这样不断进取的．当他看准了，就毫无顾虑地、毅然地、忘我地去干．干一件完全不熟悉的工作有可能将一无所成，还会遇到朋友的不理解，但是，各种困难都不能阻挠他向既定的目标前进．

三

华老是一个伟大的爱国主义者．他的不少优秀工作，如“华氏不等式”，“体的半自构定理”等，都是在国外某个特定环境中受到

启发而做出来的．1950 年回国时华老才四十岁，当时他已经是世界上著名的数学家了，至少还有十五年到二十年时间可以做数学的开拓工作，成为更伟大的数学家．尽管回国后也可以研究数学，但吸收外来营养的机会就很少了．处于这种情况，对一个像他这样有成就的数学家来说，需要怎样的决心与毅力才能决定回国啊！1979 年以后，他重访了欧洲与美国，不少人问过他这样的问题："你回国了，不后悔吗?"在英国，华老与我、潘承洞一道，就碰到过有人这样问他，华老只回以淡然一笑．1981 年，费弗曼在《旧金山周报》上发表的《华罗庚教授在旅行》一文中，写有华老谈他当初决定回国时的想法："我留下是容易的，在美国对我的妻子、儿女及我的工作都是重要的，我回去与否呢？最后我决定了，中国是我的祖国，我的家乡．我是穷人出身，革命有利于穷人．而且，我想我可以做一些对于中国数学来说，是重要的事情．"1977 年沙拉夫写的《华罗庚传》上引用了华老归国前对莱沫的谈话："中国是一个大国，一个伟大的国家，为什么要让数学这样落后呢？我们应该赶上去，我想我们是能够赶上去的．"他回国后的言行，证明这些话是真实的，即他回国是为了把中国数学搞上去而贡献一切．尽管由于左的干扰，特别是所谓"文化大革命"的干扰，华老的才华未得到更大的发挥，但华老对中国数学发展所做的贡献，确是举世公认的．1980 年，科拉达在美国《科学》上发表了《华罗庚形成中国的数学》的文章．文中列举了他所访问过的科学家是怎样高度赞扬华老成就的话，其中有数学家赛尔贝格经过深思熟虑之后说出的一段话："要是华罗庚像他的许多同胞那样，在第二次世界大战之后，仍然留在美国的话，毫无疑问，他本来会对数学作出更多的贡献．另一方面，我认为他回国对中国数学是十分重要的，很难想像，如果他不曾回国，中国的数学会怎么样．"科拉达文章的题目和结尾都用的是赛尔贝格的话．当然，形成中国的数学还有其他重

要人物与因素，然而，华罗庚培养、影响与教育了中国的好几代数学家，毕竟是事实．我相信这些人对中国数学的发展是会长久起作用的．

华老在 1984 年 8 月 25 日写的“述怀”中有这样的话：“学术权威似浮云，百万富翁若敝履，为人民服务，鞠躬尽瘁而已．”华老已经离开我们了，他留给我们的精神财富是丰富的，我们要把他的学问、品德与情操告诉后人，使后人从他的事迹中得到启发与教益．

在陈省身数学奖颁奖仪式上的讲话*

各位来宾：

今天中国数学会在这里隆重集会,举行"陈省身数学奖"颁奖仪式,我代表数学会向到会的各位来宾表示热烈欢迎与感谢.

这次颁发的陈省身奖是属于 1987～1988 年度，经过评奖委员会各位委员认真审阅各位申报受奖人的送审材料，认真讨论，最后开会进行了无记名投票．因事未能来投票的评奖委员，也在指定期限内，作了书面投票．票数最多的两名数学家，经陈省身先生确认为这次得奖人，即中国科学院系统科学研究所李邦河教授与北京大学数学系姜伯驹教授．我代表中国数学会向陈省身先生，向各位评奖委员表示感谢．向李邦河、姜伯驹教授表示祝贺．

陈省身教授的学术成就与他对中国数学发展所作的贡献，是众所周知的，无须我再作介绍了．今天我想谈谈陈先生对我的影响．早在 1948 年，我念高中时，在中央研究院任职的我的父亲就向我说起过陈省身先生的名字，知道他是中央研究院五名院士之一．但我真正认识他，则是 1951 年．当时，我看到刚出版的 Steenrod 的书"Fibre Bundle"，书后面引证了陈先生大量论文及他学生的不少论文，特别是吴文俊先生的文章很多．中国长期的落后使人们有自卑感，我们所学的，读的，走进图书馆看到的都是外国人的工作与

---

* 原载《中国数学会通讯》，1989，10～11．

著作．能看到炎黄子孙的成就，该是多么兴奋与受到鼓舞．我很激动地把 Steenrod 的书拿给同学们看，用来鼓励大家．从那时起，陈先生就是我心中的一个榜样．以后我逐渐养成一个习惯，经常浏览各种书籍杂志．当然经常见到陈先生的工作．我在这里只举一个最近的例子，即 1989 年，Springer 出版的 S. Lang 著的 "Introduction to Arakelov Theory"．这大概是一本算术几何的书，我不懂，书的第一章就是 "Chern Form"．因此我愿借这个机会向陈先生表示敬意．

基础理论研究是属于人类认识自然的工作，这对于人类改造自然有深刻与长远的作用，而数学与物理又是最重要的基础学科．刘永龄先生慷慨资助鼓励这两方面作出成绩的中国中青年科学家，必将鼓舞更多有为的青年在中国本土积极从事基础理论研究工作，并作出成就．这对我国数学与物理的发展定会产生很好的作用．刘先生是很有眼光的．请允许我代表中国数学会向刘先生表示感谢．

为了使"陈省身数学奖"更好地进行下去．我想提几个意见，供作参考：(一)关于受奖人的人选问题，宜采取个人报名与数学家或工作单位推荐相结合的方法．因此我想在中国数学会公布下一届报名通知的同时，要求评奖委员热心向评奖委员会推荐得奖人候选人选．(二)基础理论研究是一项长期方可见效的工作，由于中国的实际情况，我建议"陈省身数学奖"的章程暂不作修改，特别是受奖人的年龄问题，仍以维持五十岁左右为宜．(三)中国数学会本届理事长与陈先生协商后，调整了部分评奖委员，新的评奖委员会已经成立，名单已在《中国数学会通讯》上公布了．以后这一工作将作为一项经常工作来做．建议评奖委员会改组与中国数学会的改组同步进行．

谢谢大家．

在庆祝柯召先生八旬诞辰会上的讲话*

尊敬的柯召教授，各位同志：

我非常荣幸能参加今天这样规模的数论学术交流盛会，并庆祝柯老八十大寿及从事数学研究与教学工作五十五周年．在这个喜庆的日子里，请允许我代表中国数学会及中国科学院数学研究所向柯老致以最衷心的敬意、祝贺与感谢．祝柯老健康长寿，工作取得更大成就．

中国的数论经历了五代人的努力．最早是杨武之先生将数论引入中国，柯老与华老都是杨先生的学生，闵嗣鹤先生是杨先生介绍去清华大学工作的，他们三个人是第二代数论学家的杰出代表．柯老对数论与组合数学作出过开拓性工作，取得了卓越的贡献，这是大家公认的．他还为我国培养了好几代数学家，桃李满天下．特别在 1938 年，抗日战争烽火连天时，他拒绝留在英国，毅然回国，表现了中国知识分子的骨气与爱国精神，他始终在中国这块土地上艰苦奋斗．柯老对发展中国数学事业的贡献是全方位的，他长期担任中国数学会的领导工作，直到 1983 年，中国数学会第四届代表大会改任名誉理事长，他都和华老、陈老、苏老、江老等一起领导了中国数学会的工作．柯老还是最早的中国科学院学部委员，对中国数学发展的决策起了关键作用．

---

* 原载《中国数学会通讯》，4，1991，3～4．

我与柯老是 1961 年第一次数论大会认识的，即北京颐和园龙王庙会议，算来已三十年了，他与闵先生领导了那次会议．第三代数论学家的杰出代表陈景润与潘承洞等参加了“龙王庙会议”．在我与柯老三十年的交往中，除对他的科研教学的成就表示敬重外，我特别感到柯老是一个非常超脱与公正的人，是十分可以信赖的人，他的品德无疑得到中国数学界的敬重．

今天我很高兴，我们第四代的数论学家主持了第四次数论大会．他们这一代人最艰苦，正当他们大学毕业，应该在科研事业上勇攀高峰时，碰上了“文化大革命”，一下子就耽误了近十年宝贵的时间，不过他们中的很多人都非常努力，在这种情况下，取得了重要成绩是十分可贵的．

这次会议表示中国第五代数论学家已经露出了头角，也就是四十岁以下的学者．我对你们的要求是很高的，我希望你们能以杨老、华老、柯老、闵老、陈景润、潘承洞等为榜样，把中国的数论研究在国际上的地位维持住．我作为一个退出数论科研第一线的数学工作者，我对诸位寄以无限希望．我相信中国的数论事业在你们这一代人可以发扬光大．

这次会议的组织委员会作了很多工作，四川大学领导与数学系领导也出了很大力气，请允许我代表中国数学会及与会代表向你们致以衷心感谢．最后我祝大会成功！

在闵嗣鹤先生逝世十五周年大会上的讲话*

各位来宾，各位同志：

今天我们在这里隆重集会，纪念闵嗣鹤先生逝世十五周年，今年又恰逢他诞生七十五周年．闵先生的学术成就，热爱祖国与高尚品德都足以作为我们永久的榜样．我今天仅对闵先生的数论成就向大家作一个简单的介绍：

一　相合式（即同余式）的解数估计：闵先生于 1940 年发表了《相同式解数之渐近公式及应用此理的讨论奇异级数》一文，在该文中，闵先生证明了下面的结果：

命 $f(x)$ 为一个 n（>2）次整系数多项式及 p 表示素数，则相合式

$$f(x_1)+\cdots+f(x_s)\equiv m(\operatorname{mod}p)$$

之解数 $N(f(x),s)$ 等于

$$N(f(x),s)=\begin{cases}p^{s-1}+O(p^{s-1-\frac{s-2}{n-1}}), & \text{当 } 2<s<2n,\\ p^{2n-1}+O(p^{2n-3}), & \text{当 } s=2n.\end{cases}$$

这篇文章曾使闵先生获得高君韦奖．

二　关于二重指数和（与华罗庚合作），延用上节之记号．

---

* 这是 1988 年在济南召开的纪念闵嗣鹤先生逝世 15 周年学术会议开幕式上的讲话（未发表）

Mordell 曾证明过完整三角和估计：

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)/p} \ll p^{1-\frac{1}{n}}.$$

华先生与闵先生合作将这一著名结果推广至两个变数：

若 $f(x,y)$为一个整系数 $n(\geqslant 4)$次多项式，它关于模 p 不等价于一个变数的 n 次多项式，则

$$\sum_{x=1}^{p} \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i f(x,y)/p} \ll p^{2(1-\frac{1}{n})}.$$

闵先生又将这一结果推广至 $s(>2)$个变数的多项式的情况．

三　$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$的估计：$\zeta(\frac{1}{2}+it)$的估计问题是寻求 θ 使估计式$\zeta(\frac{1}{2}+it)=O(|t|^{\theta+\varepsilon})(|t|\geqslant 1)$对于任意 $\varepsilon>0$ 成立，其中与 O 有关的常数仅依赖于 ε．这一问题引起不少数学家的注意．有如下记录：$\theta\leqslant 1/6$(van der Corput 与 Koksma)，$\theta\leqslant 163/988$(Walfisz)，$\theta\leqslant 27/164$(Titchmarsh)，$\theta\leqslant 229/1392$(Phillips)，$\theta\leqslant 19/116$(Titchmarsh)，闵先生进一步证明了 $\theta\leqslant 15/92$．

四　$\zeta(s)$在临界线上零点个数的估计：命 $\zeta(s)$在区域 $0<\sigma<1$，$|t|\leqslant T$ 中的零点个数为 $N(T)$，而它在临界线段 $\sigma=1/2$，$|t|\leqslant T$ 上的零点个数为 $N_0(T)$，著名的 Riemann 猜想是说 $N(T)=N_0(T)$对任何 T 成立．Selberg 证明了：$N_0(T)>cN(T)$，其中 c 是一个正常数．闵先生首先给出定量估计 $c\geqslant\frac{1}{60000}$．

五　二次域中的欧氏除法问题(与华罗庚合作)：若在代数数域中可以建立欧氏除法，则称该域为欧氏域，否则称为非欧氏域．华先生与闵先生证明了：当 $P\equiv 17(\text{mod}24)$时，除 $P=17,41,89,113,137$ 外，二次域 $Q(\sqrt{P})$均非欧氏域．已知当 $P=17,41$ 时，$Q(\sqrt{p})$是欧氏域，所以存有疑点者仅为 $P=89,113,137$ 之情况．

六　$\zeta(s)$的推广：闵先生晚年从事 $\zeta(s)$的推广工作，假定 n 为

偶数，命

$$Z_{n,k}(s) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(x_1^n + \cdots + x_k^n)^s} \quad (s = \sigma + it),$$

此处在求和号中需去掉 $x_1 = \cdots = x_k = 0$. 闵先生考虑并解决了这函数的解析开拓，$Z_{n,k}(s)$的阶估计及其均值公式.

除数论之外，闵先生还从事解析函数论，近似计算及石油勘探方面的数学问题的研究. 闵先生非常热心于培养与提拔年轻数学家，潘承洞就是其中最杰出的代表.

最后，我预祝大会成功.

怀念冯康教授*

冯康教授已经离开我们一年了．听到他突然病危时，我正住在301医院治疗前列腺，所以未能向他告别，深感遗憾．但他的音容始终清晰地印在了我的脑子里．

我们是1953年认识的，那时我来数学所工作已一年，他则刚从原苏联学成回国．华罗庚所长领着他到每个办公室走走，将冯先生介绍给大家．鉴于广义函数论的重要及法国数学家薛瓦兹得到了1950年的费尔兹奖，华先生建议冯先生研究广义函数论及学习薛瓦兹的专著．冯先生很聪明，不久就学会了，而且写出了长达一百多页的综合性论文，发表在《数学进展》上，他还对广义函数的梅林变换公式得到了杰出的成果．

早在1944年，华先生就意识到计算数学的重要性．到50年代，由于计算机的日益进步，他更认为在我国发展计算数学是刻不容缓的事．我国十二年科学技术发展规划将计算技术列为重点之一，这就需要有一个年富力强的好数学家站出来领导在中国属于空白的近代计算数学．华先生看中了冯先生．但这是需要冯先生放弃自己熟悉的纯粹数学领域到一个完全陌生的领域去工作的问题，这两个领域连价值标准都不一样，所以这是不能勉强的．当华先生婉转向冯先生试探时，冯先生非常痛快地答应了．为此华先生多次表

* 原载《中国科学报》，1993．

示他对冯先生的感谢．在以后的三十多年里，冯先生作出了国内外公认的成就．他在求解偏微分方程的有限元方法与基于辛几何的哈密顿系统算法方面的工作都是开创性的．他培养与指导了中国几代计算数学家，真可以说是桃李满天下了．现在近代计算数学在中国的众多数学分支中已属强项了，这首先应该归功于冯康先生——我国近代计算数学的奠基人与开拓者．

我与冯先生很熟，多次促膝长谈，由于他的坦诚，谈话竟达二、三小时．他对数学的一般修养极好．他告诉我："虽然我只搞一个方面，但我对其他方面还是注意的．"正因为这样，每次跟他谈话都能从中受到教益．冯先生对华先生很敬仰，感情也很深．他对华先生的敬仰是基于他对华先生工作的深刻了解．比国外《华罗庚传》的作者沙拉夫早很多年，冯先生就指出："华先生的工作的主要长处之一是他用初等与简单的数学方法来解决困难的数学问题．"1985 年当冯先生得知华先生在日本突然过世时，很沉痛．在一次《计算数学》杂志编委会开会时，冯先生含着眼泪说："让我们起立，为华先生默哀．"冯先生的学术道德尤其值得学习，他很正直，不搞小圈子，对学术评价公正，学风严谨，对自己要求严格．他很少发表论文，十分重视文章质量．

由于他的品德，学问与业绩，冯先生将永远留在中国数学家心上．我们要学习他，努力将中国的数学事业发扬光大，这将是对他最好的怀念．

陈景润：生平与工作简介
（与潘承洞合作）*

陈景润于 1933 年 5 月 22 日，生于福建省福州市．他的父亲陈元俊是一个邮政局职员，母亲于 1947 年即过世．由于父亲收入低微及家庭人口较多，所以家境相当贫寒．

陈景润在福州读完小学与中学．1949 年至 1953 年，他就读于厦门大学数学系．大学毕业后，由政府分配至北京市第四中学任教．他对教师这一工作很不适宜而被辞退．厦门大学校长王亚南了解他的处境之后，于 1955 年 2 月将陈景润调回厦门大学工作．

那时，陈景润对数论产生了强烈的兴趣．厦门地处海防前线，时常有空袭警报，需到防空洞躲避．陈景润就把华罗庚的专著《堆垒素数论》撕开，放几页在身上，走到哪里，学到哪里．《堆垒素数论》的第四章"某些三角和的中值公式（Ⅱ）"是用华罗庚的方法来处理低次多项式所对应的三角和的中值公式．第五章"维诺格拉朵夫的中值公式及其推广"则是用维诺格拉朵夫方法来处理高次多项式对应的三角和的中值公式．陈景润发现用《堆垒素数论》第五章的方法可以改进第四章的某些结果．他写了一篇论文《关于塔内（G. Tarry）问题》寄给了华罗庚．华罗庚将陈景润的论文交给中国科学院数学研究所的一些研究人员审查．陈景润的结果被确

---

* 原载《数学学报》，1996，433～441．

认是对的．华罗庚认为陈景润是一个很有才能的年轻人．

1956年8月，中国数学会在北京召开“全国数学论文报告会”．由华罗庚推荐，陈景润应邀参加大会，并报告了他关于塔内问题的结果，受到与会者的好评．由于华罗庚的赏识与推荐，陈景润于1957年10月被调到中国科学院数学研究所任实习研究员．

陈景润在中国科学院数学研究所的良好环境中，研究工作进展很快，取得了重要成果．他从研究三角和的估计及其应用入手，对圆内整点问题，除数问题，球内整点问题及华林（E. Waring）问题等著名问题的结果，作出了重要的改进．

从60年代中开始，陈景润又转入了筛法及其应用的研究，达到了他研究工作的顶峰．他对哥德巴赫（C. Goldbach）猜想及殆素数分布的研究成果有广泛的影响，受到国内外数学家的高度评价．1978年与1982年，他两度收到在国际数学大会上作45分钟报告的邀请．

陈景润一直多病，健康欠佳．在“文化大革命”的十年中，陈景润受到了错误的批判与不公正的待遇，使他的工作与健康都受到严重的伤害．1984年，陈景润不幸得了帕金森氏综合症，即使在这样的情况下，他仍不停地进行研究工作，并常与年轻学生讨论数学问题．1976年，“文化大革命”结束后，陈景润的工作与生活得到了政府很好的照顾，在他病重住医院的几年中，更得到政府对他的特别照顾．1996年3月19日，陈景润因病情加重，治疗无效而去世．

由于陈景润在数学上的突出贡献，他于1977年被提升为中国科学院数学研究所研究员，1980年当选为中国科学院学部委员．陈景润得到过国家自然科学一等奖，何梁何利数学奖与中国数学会华罗庚数学奖．

陈景润于1980年与由昆女士结婚，生有一个儿子陈由伟．

数 学 工 作

一 筛法及其应用

1．表大偶数为素数与殆素数之和．

哥德巴赫猜想是 1742 年，哥德巴赫与欧拉（L. Euler）的通信中提出来的关于表整数为素数之和的两个猜想，即

每一个偶数≥6 都是两个奇素数之和， (A)

每一个奇数≥9 都是三个奇素数之和． (B)

显然由（A）可以推出（B）．基于圆法及关于素变数三角和的估计，维诺格拉朵夫（И. М. Виноградов）于 1937 年天才地证明了，猜想（B）对于充分大的奇数成立．因此剩下要证明的就是猜想（A）了．利用维诺格拉朵夫方法还可以证明，几乎所有的偶数都是两个素数之和．详言之，命 $E(x)$表示不超过 x 的偶数中不能表示为两个素数之和的偶数个数，则 $E(x)=O(x(\ln x)^{-B})$，其中 B 为任意正常数，且与 O 有关的常数仅依赖于 B．

研究猜想（A）的另一个方法是筛法．筛法肇源于公元前 250 年的"埃拉朵斯染尼氏（Eratosthenes）筛法"．1919 年，布伦（V. Brun）对筛法作出了重大改进，并将它用于哥德巴赫猜想．命 P_a 表示素因子个数不超过 a 的整数．我们称 P_a 为一个殆素数．布伦证明了：

每一个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过 9 的殆素数之和，简单记为（9，9）． (1)

我们可以类似地定义（a，b）．不少数学家改进了布伦的方法与他的结果：（7，7）（拉代马海尔（H. Rademacher），1924），（6，6）（埃斯特曼（T. Estermann），1932），（5，5）（布赫夕塔布（A. A. Buchstab）1938），（4，4）（布赫夕塔布，1940）及

(a, b) $(a+b\leqslant 6$, 孔恩 (P. Kuhn), 1954), 其中布赫夕塔布与孔恩是将某些组合方法加以巧妙地运用, 从而使布伦方法的威力大大地提高了. 关于埃拉朵斯染尼氏筛法的另一重要改进是 1947 年赛尔贝格 (A. Selberg) 提出来的. 综合以上的方法, 王元证明了 (3, 4) (1956) 与 (2, 3) (1957).

运用布伦筛法, 素数分布理论及林尼克 (Yu. V. Linnik) 的大筛法, 瑞尼 (A. Rényi) 于 1948 年证明了 $(1, c)$, 即

每一个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 c 的殆素数之和, 其中 c 是一个常数. (2)

命 $\pi(x; k, l)$ 表示适合 $p\equiv l\ (\mathrm{mod}\,k)$, $p\leqslant x$ 的素数个数. 瑞尼关于 (2) 的证明中隐含了下面关于 $\pi(x; k, l)$ 的中值公式: 存在 $\delta>0$ 使

$$\sum_{k\leqslant x^{\delta}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{\mathrm{li}x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{c_1}}\right), \qquad (3)$$

其中 $\varphi(k)$ 表示欧拉函数, $\mathrm{li}x=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ 及 c_1 为常数 $\geqslant 5$. 1961 年与 1962 年, 巴尔巴恩 (M. B. Barban) 与潘承洞分别独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{1}{6}-\epsilon$ 及 $\delta=\frac{1}{3}-\epsilon$ 成立, 其中 ϵ 为任意正数, 而与 O 有关的常数依赖于 ϵ. 潘承洞并由 $\delta=\frac{1}{3}-\epsilon$ 导出 (1, 5). 1962 年与 1963 年, 潘承洞与巴尔巴恩又独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{3}{8}-\epsilon$ 成立并推出 (1, 4). 注意有时 (3) 式中的 $\pi(x;k,l)$ 需换成一个加权和. 1965 年, 阿·维诺格拉朵夫 (A. I. Vinogradov) 与庞比尼 (E. Bombieri) 独立地得出 $\delta=\frac{1}{2}-\epsilon$. 庞比尼的结果得出的 k 的范围还更大一些, 即 $x^{\frac{1}{2}}/(\ln x)^{c_2}$, 其中 c_2 是依赖于 c_1 的正常数, 由此导出了 (1, 3). 庞比尼－阿·维诺格拉朵夫公式的重要性在于有时可以用它来代替广义

黎曼(G. F. B. Riemann)猜想.

1966年，陈景润天才地引进了一个转换原理，从而证明了(1, 2)，即

每个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过2的殆素数之和. (4)

命 p, p_1, p_2, p_3 表示素数，$A = \{a_v\}$ 为一个有限整数集合，及 $F(A;q,q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数：$a_v \equiv 0(\bmod q)$，$a_v \not\equiv 0(\bmod p)(p < q', p \nmid q)$，特别记 $F(A;q') = F(A;1,q')$.

命 n 为一个偶数，$A = \{n - p, p < n\}$，

$$N = F(A;n^{\frac{1}{10}}) - \frac{1}{2}\sum_{n^{\frac{1}{10}} \leqslant p < n^{\frac{1}{3}}} F(A;p,p^{\frac{1}{10}}),$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{\substack{p<n\\(p1,2)}}\ \sum_{\substack{n-p=p1p2p3\\p3\leqslant n/p1p2}} 1$$

及 $M = N - \Omega + O(n^{9/10})$，此处 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < n^{\frac{1}{3}} \leqslant p_2 \leqslant \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. 藉助于庞比尼 - 阿·维诺格拉朵夫中值公式及各种筛法可以得出 N 的一个正下界估计，由此即得出(1, 3). 陈景润引进 Ω，并给一个上界估计，从而使 M 有一个正下界. 这样就证明了(1, 2)(见[18, 19]).

2. 表偶数为两素数之和的表法数估计.

命 n 为偶数及 $D(n) = \sum_{p_1+p_2=n} 1$ 表示将 n 表为两素数之和的表法个数. 将赛尔贝格筛法用于集合 $A = \{a_v = v(n-v), 1 \leqslant v < n\}$，则可以得到

$$D(n) \leqslant 16\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1 + o(1)),$$

此处

$$\sigma(n)=\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

若将赛尔贝格筛法用于集合 $A=\{a_p=n-p,p<n\}$ 并用到庞比尼－阿·维诺格拉朵夫中值公式，则可以得到 $D(n)\leqslant 8\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1+o(1))$. 但欲改进系数 8，则是很困难的事. 1978 年，陈景润将系数 8 改进为 7.8342. 换言之，他证明了(见[25])

$$D(n)\leqslant 7.8342\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1+o(1)). \tag{5}$$

3. 殆素数的分布问题.

素数论中有一个著名猜想：

当 $x\geqslant 1$ 时，在区间 $[x,x+2x^{\frac{1}{2}}]$ 中恒有一个素数.　　(C)

首先是布伦在 1919 年，用他的筛法证明了，当 x 充分大时，在区间 $[x,x+x^{\frac{1}{2}}]$ 中存在一个殆素数 P_{11}，即猜想(C)对 P_{11} 成立. 布伦的结果被不少数学家加以改进. 例如王元在 1957 年证明了存在 $P_3\in[x,x+x^{\frac{20}{49}}]$ $(x>x_0)$. 我们有兴趣于这样的问题，即对于用殆素数 P_2 代替素数时，猜想(C)是否成立？王元于 1957 年证明了，当 x 充分大时，有 P_2 满足 $P_2\in[x,x+x^{\frac{10}{17}}]$. 1969 年，黎切尔特(H.E. Richert)将上面的结果进一步改进为 $P_2\in[x,x+x^{\frac{6}{11}}]$，$(x>x_0)$. 1975 年，陈景润对于 P_2 证明了猜想(C)，即当 x 充分大时有 P_2 使

$$P_2\in[x,x+x^{\frac{1}{2}}]. \tag{6}$$

陈景润在证明(6)时用到了加权筛法，其中余项估计用到了三角和的估计. 1979 年，陈景润又用组合方法将(6)式中的 $x^{1/2}$ 改进为 $x^{0.477}$. 陈景润的方法成为以后不少重要工作的出发点(见[21,27]).

二　其他工作

4. 华林问题.

所谓华林问题是英国数学家华林于1770年提出来的关于表正整数为正整数的等方幂和的问题，即

对于整数 $k\geqslant 2$，恒存在一个仅依赖于 k 的整数 $s=s(k)$，使每一个正整数都可以表示为 s 个非负整数的 k 次方幂之和. (D)

这一历史难题是1908年由希尔伯特(D. Hilbert)证明的. 命使上面结论成立的最小的 s 为 $g(k)$. 问 $g(k)$ 等于什么？或其上界估计？已有的重要结果为 $g(2)=4$(欧拉，拉格朗日(J. L. Lagrange)1770). $g(3)=9$ 很早即被菲弗立希(A. Wieferich)证明. 狄克逊(L. E. Dickson)与皮勒(S. S. Pillai)独立地证明了当 $k>6$ 及

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]\leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+3\right\} \tag{7}$$

时有

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2,$$

此处 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 皮勒又证明了 $g(6)=73$. 于是剩下要处理的只是 $k=4,5$ 及使(7)式不成立的 k. 陈景润于1964年完全解决了 $k=5$ 时的情形，即

$$g(5)=37. \tag{8}$$

用陈景润的方法还可以导出 $g(4)\leqslant 20$(见[3,11,20]). 直至1986年，巴拉苏仆勒曼尼(R. Balasubramanian)，德苏耶(J. M. Deshouillers)与坠斯(F. Dress)才证明了 $g(4)=19$(见[BDD86]).

5. 格子点问题.

命 $r(n)$ 表示将正整数 n 分解成两个整数平方之和的分法个数及 $r(0)=1$，则

$$A(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}r(n)$$

就等于落在圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 中的整点 (u,v) 的个数. 命 $d(n)$ 表示正整数 n 的因子个数，则

$$D(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} d(n)$$

就是在双曲扇形 $uv \leqslant x, u \geqslant 1, v \geqslant 1$ 中的整点(u, v)的个数.所谓圆内整点问题与除数问题分别为求最小的 θ 与 φ 使对于任何 $\varepsilon > 0$ 皆有 $A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$ 与 $D(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(x^{\varphi+\varepsilon})$ 成立,此处 γ 为欧拉常数而与 O 有关的常数仅依赖于 ε.数论中有一个著名的猜想:

$$\theta = \varphi = \frac{1}{4}. \tag{E}$$

还有一个著名问题为求黎曼 ζ-函数在临界线上的阶,即 $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ 的估计.由于近代处理这些问题的方法都是类似三角和的估计,所以仅叙述圆内整点问题的进展.

首先是高斯(C.F.Gauss)证明了 $\theta = \frac{1}{2}$.1903 年,伏龙诺耶(G. Voronoi)给予重要改进,他证明了 $\varphi = \frac{1}{3}$,1906 年夕尔宾斯基(W. Sierpinski)证明了 $\theta = \frac{1}{3}$.1923 年,范·代·柯尔坡特(J.G.Van der Corput)引进了某种三角和的估计,将 θ 改进为 $\theta = \frac{37}{112}$.迄至 1942 年,最佳结果 $\theta = \frac{13}{40}$ 是华罗庚得到的.1963 年,陈景润将华罗庚的结果改进为 $\theta = \frac{12}{37}$,即

$$A(x) = \pi x + O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon}) \tag{9}$$

(见[8]).

现在最好的估计是依万尼斯(H.Iwaniec)与莫卓溪(J. Mozzochi)得到的 $\theta = \frac{7}{22}$(见[IM88]).

类似于圆内整点问题与除数问题有所谓球内整点问题与虚二次域的类数平均问题.详言之,命 $B(x)$ 表示球 $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant x$ 内的

整点(u,v,w)的个数.求最小的θ_1使对于任何$\varepsilon>0$皆有$B(x)=\frac{4}{3}\pi x^{3/2}+O(x^{\theta_1+\varepsilon})$. 这就是球内整点问题. 命 d 为整数 >0 及 $h(-d)$表示虚二次域$Q(\sqrt{-d})$的类数.类数平均问题就是求最小的 φ_1 使对于任何 $\varepsilon>0$,

$$H(x)=\sum_{1\leqslant d\leqslant x}h(-d)$$
$$=\frac{4\pi}{21\zeta(3)}x^{3/2}-\frac{2}{\pi^2}x+O(x^{\varphi_1+\varepsilon}).$$

1963 年,陈景润与维诺格拉朵夫独立地证明了

$$\theta_1=\varphi_1=2/3. \tag{10}$$

与圆内整点问题相类似,θ_1 与 φ_1 也有相应的改进.

6.算术级数中的最小素数问题.

命 k,l 为满足$(k,l)=1$的正整数,问在算术级数 $kn+l,n=0,1,2,\cdots$ 中是否有无穷多个素数. 这个问题是狄利克雷(G.L. Dirichlet)于 1837 年解决的.命 $P(k,l)$ 表示上面算术级数中的最小素数.1934 年,邱拉(S. Chowla)曾猜想,对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有

$$P(k,l)=O(k^{1+\varepsilon}), \tag{F}$$

此处与"O"有关的常数依赖于ε.首先是林尼克于1944年证明了,存在常数 c 使

$$P(k,l)=O(k^c). \tag{11}$$

潘承洞于 1957 年最先定出 $c\leqslant 5448$.其后不少数学家改进了潘承洞的结果,其中陈景润与他的学生曾证明过 c 可以取如下之值:

$$777,168,17,15,13.5,11.5 \tag{12}$$

(见[17,22,26,38,40,48]).

目前最佳估计 $c\leqslant 5.5$ 是希斯－仆朗(D. R. Heath－Brown)得到的(见[HB92]).

7.哥德巴赫数问题.

凡可以表示为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数.前面定义过的$E(x)$就是不超过x的非哥德巴赫偶数的个数.1975年,蒙哥马利(H.L.Montgomery)与沃恩(R.C.Vaughan)将$E(x)$的估计改进为:存在$\delta>0$使$E(x)=O(x^{1-\delta})$,此处与"O"有关的常数依赖于δ(见[MV75]).1979年,陈景润与潘承洞首次定出

$$\delta>0.01, \tag{13}$$

其后陈景润又将δ的估计改进为$\delta>0.05$(见[29,30,44]).

8.三角和的估计.

命q为整数$\geqslant 2$及$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$为整系数k次多项式且满足$(a_k,\cdots,a_1,q)=1$.引入完整三角和

$$S(f(x),q)=\sum_{x=1}^{q}e(f(x)/q),$$

其中$e(y)=e^{2\pi iy}$.当$f(x)=ax^2$时,$S(ax^2,q)$就是有名的高斯和.高斯给出了估计式

$$|S(ax^2,q)|\leqslant 2\sqrt{q}. \tag{14}$$

对于一般的完整三角和估计这一著名问题是华罗庚于1940年证明的:

$$|S(f(x),q)|\leqslant c(k)q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{15}$$

其中$c(k)$为依赖于k的常数.(15)右端的阶$1-\frac{1}{k}$是臻于至善的.1977年,陈景润给出了$c(k)$的估计:

$$c(k)=\begin{cases}\exp(4k), & \text{当 } k\geqslant 10,\\ \exp(kA(k)), & \text{当 } 3\leqslant k\leqslant 9,\end{cases} \tag{16}$$

其中$\exp(x)=e^x$及$A(3)=6.1$, $A(4)=5.5$, $A(5)=5$, $A(6)=4.7$, $A(7)=4.4$, $A(8)=4.2$, $A(9)=4.05$等(见[23]).

后记:关于陈景润的生平与工作,过去曾有过一些著作.例如[HR74, W80, PP81, W84, W88, WYP88, Z91],在撰写本文时,作者

参考了这些著作.

注:带数码的参考文献见本书后“陈景润论著目录”.(从略)

参考文献

〔HR74〕 Halberstam H, Richert H E. Sieve Methods. Acad. Press, 1974

〔W80〕 王元. 解析数论在中国. 自然杂志（日本），1980，8：57～60.

〔PP81〕 潘承洞，潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京：科学出版社. 1981.

〔W84〕 Wang Y.(Editor)Goldbach Conjecture. World Sci. Pub. Comp., 1984

〔W88〕 王元. 陈景润. 见：中国大百科全书，数学卷 北京：中国大百科全书出版社，1988，80.

〔WYP88〕 Wang Y, Yang C C, Pan C B, (Editors) Number Theory and Its Applications in China. Cont. Math.; Amer Math. Sci.; 1988, 77

〔Z91〕 张明尧. 陈景润. 见：中国现代科学家传记 北京：科学出版社，1991.

〔BDD86〕 Balasubramanian R, Deshouiller J M, Dress F Problème de Waring pour les bicarres Ⅱ. *C. R. Acad, Sci. Paris, I Math.*, 1986, 303：161～163.

〔IM88〕 Iwaniec H, Mazzochi C J. On the divisor and circle problems. *J Num. Theory*, 1988, 29：60～93.

〔HB92〕 Heath-Brown D R. Zero free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression. *PLMS*, 1992, 64：265～338.

〔MV75〕 Montgomery H L. Vaughan R C. The exceptional set in Goldbach's problem. *Acta Arith.*, 1975, 27：353～370.

心血的结晶*

今年5月22日是著名数学家陈景润诞生65周年.江西教育出版社出版了《陈景润文集》.这是一件好事,也是对景润最好的纪念.

景润出生于福建省福州市一个邮局职员家庭.在他14岁时,他的母亲即过世,家庭人口较多,所以生活颇困难.景润中学毕业后,于1949年考入厦门大学数学系,毕业后,由政府分配至北京市第四中学教书.由于景润不适宜做教学工作,由厦大校长王亚南介绍他回厦大担任职员,这样他可以边工作边学习.

厦门地处海防前线,景润将华罗庚先生的名著《堆垒素数论》撕开,一页页地随身带着,在防空洞里仍然不间断地学习.功夫不负苦心人,景润终于发现《堆垒素数论》第五章的方法可以用来改进第四章的某些结果.他将结果寄给了华先生.经当时中科院数学所数论组人员的审查,确认无误.鉴于景润善于独立思考,有创造精神,华先生将他调来数学所数论组工作.在数论组这样良好的学术环境中,景润如鱼得水,进步很快,研究工作连续上了两个台阶.特别在哥德巴赫猜想研究方面达到了国际领先地位,从而成为一个国际知名的解析数论学者.

景润从小体质较差,瘦小,多病,经常发烧.在这种情况下,仍坚持学习与研究工作,而且经常夜以继日地工作着.这确实是常

---

* 这是1998年3月在北京举行的《陈景润文集》研讨会上的讲话(未发表).

人所难以做到的．景润生性腼腆，不善于与人交往．从“反右斗争”到“文化大革命”结束的二十年里，不停的政治运动与斗争，造成人与人之间的重重隔阂，人人自危．景润更是紧张与孤立地生活着，很怕跟人直接交往．但他决非真正糊涂，他的内心是明白的，人们对他是谅解的．也有少数受极左思潮影响的人则歧视他，甚至不尊重他的人格尊严，尤其在“文化大革命”中为甚．在历次政治运动中，景润受到了不公正的待遇，甚至迫害．

1973 年，景润的重大成就被确认后，得到了党和政府对他的照顾与关怀，景润的处境有了根本改变．“四人帮”被打倒后，他还去美国，英国与法国讲学过．80 年代，景润的健康每况愈下，并不幸患了帕金森氏综合症，长期住院治疗．在他住院期间，曾得到中央组织部，统战部，中科院，福建省委等部门很好的照顾与帮助，得到了很好的治疗，但终因身体机能消耗殆尽，于 1996 年 3 月 19 日过世．

景润的过世，无疑是中国数学界的一个无法弥补的损失．为了寄托对他的怀念及让世人了解他的杰出成就，景润的生前好友与同行策划出版《陈景润文集》．这虽然是一项很有价值做的事，但发行量不会大，会有经济上的亏损．江西教育出版社注重社会效应，却乐于承担这本书的出版发行工作，的确是很有眼光，令人佩服的．在各方面的积极努力下，只花了两年时间，这本书即面世．如果景润在天之灵有知，当可得到安慰了．顺便说一下，斯普林格出版社已决定出版《陈景润文集》的英文版．

《陈景润文集》全书收集了景润各个时期的 25 篇论文及景润的著作目录，共约 50 多万字．还附有编辑潘承洞与王元撰写的“陈景润的工作与生平简介”，可以作为了解景润工作的导引．

景润的论文是按照时间顺序编排的，读者可以看出景润是如何由一个刚进入解析数论研究的年轻学者逐步走向成熟的过程，然后

由于重病缠身，写出与病魔作顽强斗争时的一些篇章．由此可以看出作者一生的创作轨迹．

景润最光辉的成就是关于哥德巴赫猜想的研究．这一猜想是1742年哥德巴赫写信给当时最伟大的数学家欧拉时提出的，即："每个大于2的偶数都是两个素数之和"．鉴于这一猜想的重要性，在1900年召开的国际数学大会上，希尔伯特曾将这一猜想作为他的第八问题的一部分推荐给本世纪的数学家．直到本世纪的20年代，这一猜想的研究才有了突破．首先是挪威数学家布伦证明了"每个大偶数都是两个不超过9个素数的乘积之和"，简记为（9，9)．哥德巴赫猜想本质上就是（1，1)．布伦的结果与方法引起了世界上很多著名数论学家的注意，并被逐步地加以改进．在这个漫长的过程中的最后一块里程碑（1，2）是属于景润的．换言之，他证明了"每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和"．国际上称这一定理为"陈氏定理"．

景润证明（1，2）的方法是有天才与创造性的，国际上称为他的"转换原理"，它有相当普遍的应用．华罗庚曾说过："我的学生的工作中，最使我感动的是（1，2)．"1974年出版的哈贝斯坦与黎切尔特合著的《筛法》一书在付印之中，作者得知景润已证明了（1，2)，立即以"陈氏定理"为标题加写了一章，开篇就写道："我们本章的目的是为了证明陈景润下面的惊人定理，我们是在前十章已付印时才注意到这一结果的．从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点．"在1974年的国际数学大会上，介绍菲尔兹奖得主庞比尼的主要工作时，陈氏定理与前苏联科学院士维诺格拉朵夫的"三素数定理"与林尼克院士证明的哈代－李特伍德猜想一起，被列为与庞比尼工作相关的三项最伟大的成就．景润也收到了1978年与1982年到国际数学大会作报告的邀请．

我们感到遗憾的是，在《陈景润文集》即将面世之时，本书的

编辑之一，景润的朋友与合作者潘承洞也永远离开了我们．他未能见到本书的出版．

景润虽然离开我们了，但他的业绩将是永存的．从他的文集里，我们将清楚地看到作者顽强拼搏的一生．这将永远激励后代为中华民族的崛起而奋发向上．特别当我们想到景润是在怎样的条件下得到这些成果的时候，他的形象必将更雄伟地展现在我们的面前．

潘承洞：生平与工作简介*

潘承洞于 1934 年 5 月 26 日生于江苏省苏州市一个旧式大家庭中，他的父亲潘子起，号艮斋．母亲高嘉懿，江苏省常熟市人，出身贫苦家庭，不识字．他们有一女两子．父亲的忠厚，母亲的劳动妇女的优良品德与严格管教，使子女能够健康成长，激励他们奋发图强．

潘承洞在 1946 年 8 月考入苏州振声中学初中，1949 年毕业后考入苏州桃坞中学高中．潘承洞小时候十分爱玩，棋、牌、足球、乒乓球、台球……样样都喜欢，玩得高兴时就什么都忘了．因此，上小学时曾留级一年．读高中时，教他数学的是上海、苏州地区有名望的祝忠俊先生．一次，他发现《范氏大代数》一书中一道有关循环排列题的解答是错的，并作了改正．这使得教了 20 多年书而忽略了这一点的祝老师对他不迷信书本、善于发现问题、进行独立思考的才能十分赞赏．潘承洞 1952 年高中毕业，同年考入北京大学数学力学系．当时，全国高校刚调整院系，许多著名学者，如江泽涵、段学复、戴文赛、闵嗣鹤、程民德、吴光磊等，为他们讲授基础课．以具有许多简明、优美的猜想为特点的数学分支——数论，在历史上一直使各个时期的数学大师着迷．但是，它们中的大

---

* 本文较多取材于于秀源：《潘承洞》，见《中国现代科学家传记》，第六集，科学出版社，1994．原载《数学学报》，3，1998，449—454．

多数仍是未解决的问题．这些猜想深深地吸引着潘承洞．在闵嗣鹤循循善诱的引导下，他选学了解析数论专门化．1956 年大学毕业，留北京大学数力系工作．翌年二月，成为闵嗣鹤的研究生．

20 世纪 50 年代前后是近代解析数论的一个重要发展时期，为了研究数论中的著名猜想，一些重要的新的解析方法，如大筛法、黎曼 ζ 函数与狄利克雷 L 函数的零点分布、塞尔伯格筛法等，相继提出，成为解析数论界研究的中心．闵嗣鹤教授极有远见地为潘承洞确定了研究方向：L 函数的零点分布，及其在著名数论问题中的应用．在学习期间，他还有幸参加了华罗庚教授在中国科学院数学研究所主持的哥德巴赫猜想讨论班，并与陈景润、王元等一起讨论，互相学习与启发．在闵嗣鹤的指导下，潘承洞在大学与研究生期间完成的主要论文有：《论算术级数中之最小素数》[2,3]和《堆垒素数论的一些新结果》[4]．1961 年 3 月起在山东大学数学系任助教．同年与李淑英结婚，有一女．李淑英现为山东大学光电材料研究所高级工程师．1962 年，潘承洞升任讲师．

到山东大学后的短短几年中，他发表的主要论文有：《表大偶数为素数与殆素数之和》[6]，《表大偶数为素数与一个不超过四个素数的乘积之和》[7]，以及《Ю. В. Линник 大筛法的一个新应用》[8]．这些工作对哥德巴赫猜想与算术数列中最小素数这两个著名问题的研究做出了重要贡献，受到华罗庚、闵嗣鹤及国内外同行的高度评价．1964 年，他当选为山东省青年联合会副主席．

1966 年开始的“文化大革命”，严重地搅乱了科学研究，尤其是基础理论研究的正常秩序．潘承洞无法进行他的研究工作．1973 年，陈景润关于哥德巴赫猜想的著名论文发表后，潘承洞又开始了解析数论研究．这一时期工作的代表性论文是《一个新的均值定理及其应用》[16]．他的主要贡献是提出并证明了一类新的素数分布的均值定理，给出了这一定理对包括哥德巴赫猜想在内的许多著名

数论问题的重要应用. 1979 年 7 月, 在英国达勒姆举行的国际解析数论会议上, 潘承洞应邀以此为题作了一小时报告, 受到华罗庚和与会者的高度评价. 1982 年, 潘承洞发表了论文《研究 Goldbach 猜想的一个新尝试》[18], 提出了与已有研究截然不同的方法, 对哥德巴赫猜想作了有益的探索. 1988～1990 年间, 他与潘承彪以《小区间上的素变数三角和估计》为题发表了三篇论文[19～21], 提出了用纯分析方法估计小区间上的素变数三角和, 第一次严格证明了小区间上的三素数定理, 这是他对论文 [4] 的进一步完善和改进.

1981 年出版了潘承洞与潘承彪合著的《哥德巴赫猜想》, 对猜想的研究历史、主要研究方法及研究成果作了系统的介绍与有价值的总结, 得到了国内外数学界的一致好评[32]. 他们还合著了《素数定理的初等证明》(1988)、《解析数论基础》(1991)、《初等代数数论》(1991) 及《初等数论》(1992). 潘承洞与于秀源合著了《阶的估计》(1983). 潘承洞还写了科普读物《素数分布与哥德巴赫猜想》(1979). 这些著作对我国数论的科研、教学和人才培养都起了很好的作用.

自 1978 年以来, 潘承洞已经指导培养了 10 多名博士研究生和近 20 名硕士研究生, 其中包括我国首批博士学位获得者之一于秀源. 他培养的研究生工作在全国各地, 已成为我国数论界的重要新生力量. 从 80 年代中期开始, 潘承洞和同事们在山东大学开始建立数论应用的研究队伍, 并培养这方面的研究生.

1978 年 5 月, 潘承洞晋升为教授. 1981 年加入中国共产党. 1979 年 10 月到 1984 年 6 月, 任山东大学数学系主任. 1984 年 7 月起, 任山东大学数学研究所所长. 1984 年 7 月至 1986 年 12 月, 任山东大学副校长. 1986 年底, 被任命为山东大学校长. 1991 年, 潘承洞当选为中国科学院学部委员. 潘承洞还担任了一些社会工

作，现任山东省科协主席，中国数学会副理事长，山东省自然科学基金委员会副主任，国务院学位委员会数学学科评议组成员，《数学年刊》常务编委．他还参加了国家自然科学基金委员会数学学科评审的领导工作．

潘承洞是第五、六、七、八届全国人大代表．1978 年，潘承洞获全国科学大会奖并获全国科技先进工作者称号；1979 年被授予全国劳动模范称号；1982 年，因对哥德巴赫猜想研究中的突出贡献，与陈景润、王元一起获国家自然科学奖一等奖；1984 年，被评为我国首批有突出贡献的中青年专家；1988 年获山东省首批专业技术拔尖人才荣誉称号．

潘承洞在解析数论研究中所取得的成就主要有以下几个方面：

1．算术数列中的最小素数．

设 a 与 q 是两个互素的正整数，$a<q$, $q>2$. 以 $P(q,a)$表示算术数列 $a+kq(k=0,1,2,\cdots)$中的最小素数．一个著名的问题是要证明

$$P(q,a)\leqslant q\log^2 q.$$

1944 年，Ю.В. 林尼克（Линник）首先证明存在正常数 λ，使得

$$P(q,a)\leqslant q^{\lambda}.$$

这只是一个定性结果，且证明很复杂与冗长．1954 年，K.A. 罗托斯基（Родосский）才给了一个较简单的证明，但 P. 吐朗（Turán）在他的书末曾提及罗托斯基的方法并未给出 λ 的数值的任何消息，并指出如果改用他自己的方法，很可能定出 λ 来，但始终未见有文章发表．1957 年，潘承洞在他的两篇论文[2,3]中，通过对 L 函数性质的深入研究，本质上改进了林尼克的证明，明确指出 λ 主要依赖于和 L 函数有关的三个常数，具体给出了计算 λ 的方法．他先后得到了

$\lambda<10^4$ 与 $\lambda<5448$.

林尼克亲自为他的文章写了长篇评论[33]. 此后所有改进常数 λ 数值的工作都是在潘承洞所建立的这一框架下得到的. 30 多年来的主要改进是:

$\lambda\leqslant 770, 550, 168, 80, 20, 11.5, 8, 5.5.$

它们分别是由陈景润, M. 尤梯拉 (Jutila), 陈景润, 尤梯拉, S. 格拉汉姆 (Graham), 陈景润与刘健民, 王炜, D.R. 黑斯-布朗 (Heath-Brown) 得到的.

2. 哥德巴赫猜想, 大筛法, 以及素数分布的均值定理.

为了研究著名的哥德巴赫猜想——每一个大于 2 的偶数一定是两素数之和, 人们提出先研究这样一个较简单的命题: 存在一个正整数 r, 使得每一个充分大的偶数一定是一个素数与一个不超过 r 个素数的乘积的和. 这一命题简记为 $\{1, r\}$. 这样, 哥德巴赫猜想基本上就是命题 $\{1, 1\}$. 在哥德巴赫猜想提出 200 多年后, A. 兰恩易 (Rényi) 通过对林尼克的大筛法的重大改进, 结合 V. 布伦 (Brun) 筛法, 证明了命题 $\{1, r\}$. 这是一个重大的开创性工作, 但是由于证明方法上的缺点, 他的结果是定性的, 即不能定出 r 的有效值. 兰恩易证明的关键实质上隐含地就是要证明如下的素数分布均值定理: 存在正数 η, 使得对任意的正数 B 及 ε 有

$$\sum_{d\leqslant x^{\eta-\varepsilon}}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(x;d,l)-\frac{1}{\varphi(d)}\pi(x)\right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^B}\right), \tag{1}$$

其中与"O"有关的常数依赖于 ε 与 B, $\varphi(d)$ 是欧拉函数, $\pi(x;d,l)$ 表示满足条件

$p\leqslant x,\ p\equiv l(\bmod d)$

的素数 p 的个数, 并且 $\pi(x)=\pi(x;1,1)$. 兰恩易把(1)式左边的和式转换为估计一个对 L 函数零点求和的三重和式. 这种和式的估计

是很困难的，他通过对大筛法的改进，进一步改进 L 函数零点分布的结论，从而直接估计出这个三重和式的最内层和，然后，再由显然方法估计这个三重和式．由此，他证明了存在正数 η 使得(1)式成立，进而推出存在正整数 r 使命题{1, r}成立．由于兰恩易只是有效地估计最内层和，所以无法有效地给出 η 和 r 的值．1962 年，潘承洞对大筛法与 L 函数零点分布的结论做了进一步改进，使他得以对三重和式内的二重和式作整体的有效估计，他证明了当 $\eta=1/3$ 时，(1)式成立，进而推出命题{1, 5}成立．M.B. 巴邦(Барбанн)独立地证明过 $\eta=1/6$ 时，(1)成立，但并未给出在哥德巴赫问题上的应用．这是一个出人意料的重大进展．1963 年，他又与巴邦独立地证明了当 $\eta=3/8$ 时，(1)式成立，并进而证明了命题{1, 4}．1965 年，E. 邦别里(Bombieri)和 А.И. 维诺格拉多夫(Виноградов)各自独立地通过对大筛法的最佳改进，得以从整体上估计上述三重和式，从而证明了当 $\eta=1/2$ 时(1)成立，这是邦别里获得菲尔兹奖的主要工作．H. 哈伯斯塔姆(Halberstam)在评论邦别里的这一工作时指出[34]：潘承洞的结果是“真正杰出的工作”．1983 年，E. 福利(Fouvry)和 H. 伊万尼斯(Iwaniec)指出[35]：邦别里—维诺格拉多夫定理是在林尼克、兰恩易、潘承洞、巴邦等人的“开创性工作的基础上得到的”．

1973 年，潘承洞提出并证明了一类新的素数分布均值定理，它是邦别里—维诺格拉多夫定理的重要推广与发展，能容易地解决后者所不能直接克服的困难．利用这一新的均值定理不仅给出了陈景润定理——命题{1, 2}的最简单的证明，成为以后研究哥德巴赫猜想型问题的基础，而且在不少著名解析数论问题中有重要应用，特别是 1983 年黑斯—布朗在关于原根的 E. 阿廷(Artin)猜想的论文中应用它得到了重要成果．1988 年，H.E. 理歇特(Richert)在纪念华罗庚国际数论与分析会议上发表的综述性论文[36]中，把邦别里—维诺格拉多夫定理，陈景润定理，以及潘承洞的新均值定理称为这一领域

的三项最重要的成果.

3. 小区间上的素变数三角和估计与小区间上的三素数定理.

1937 年,维诺格拉多夫证明了著名的三素数定理:每一充分大的奇数一定是三个素数的和.这就基本上解决了 1742 年哥德巴赫所提出的猜想的一部分:每个大于 5 的奇数都是三个素数之和.维诺格拉多夫的主要贡献在于得到了素变数三角和

$$\sum_{p\leqslant x} e^{2\pi i\alpha p}$$

的非显然估计,其中 α 为实数,p 为素数变数. C.B. 哈塞格庐乌(Haselgrove)在 1951 年首先考虑了这样的问题:每个充分大的奇数一定是三个几乎相等的素数的和.他宣布了一个结果但没有证明.精确地说,上述问题可以这样表达:存在正数 $c<1$,使对每个大奇数 N,素变数 p_1, p_2, p_3 的不定方程

$$\begin{cases} N = p_1 + p_2 + p_3, \\ \dfrac{N}{3} - N^{c+\epsilon} \leqslant p_j \leqslant \dfrac{N}{3} + N^{c+\epsilon}, j = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{2}$$

必有解,其中 ϵ 为任意的正数.这就是小区间上的三素数定理.解决这一定理的关键是估计小区间上的素变数三角和

$$\sum_{x-A<p<x} e^{2\pi i\alpha p}, \tag{3}$$

其中 $2\leqslant A\leqslant x$.维诺格拉多夫曾经给出了三角和(3)的一个非显然估计,他的方法本质上是筛法.但是,他的结论不足以解决这一问题. 1959 年,潘承洞用分析方法给出了(3)式的非显然估计,再结合维诺格拉多夫的估计,证明了不定方程(2)当 $c = 160/183$ 时有解,且有解数的渐近公式.虽然在他的证明中有缺陷,但他的方法为以后研究小区间素变数问题的论文经常运用. 1988 年起,潘承洞与潘承彪继续发展了他的思想,发表了三篇论文,不仅完善了 1959 年的结果,而且全面完整地提出了用纯分析方法来估计小区间素变数三角和(3),进而相继证明了当 $c = 91/96, 2/3$ 时(2)有解,且有解数的渐近公式.这

些结果后来进一步为贾朝华、展涛所改进.潘承洞在这些论文中提出的思想、方法，及改进圆法的应用，在研究一些解析数论问题中，看来还有进一步发展的潜力.

4.哥德巴赫数的例外集.

凡可以表示为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数.命 $E(x)$ 表示不超过 x 的非哥德巴赫数的偶数个数.1975 年，H.L.蒙哥马利(Montgomery)与 R.C.沃恩(Vaughan)证明了：存在 $\delta>0$ 使

$$E(x)=O(x^{1-\delta}),$$

此处与"O"有关的常数依赖于 δ.1979 年陈景润与潘承洞首次指出 δ 是可以计算的，并给出估计 $\delta>0.01$.

5.大筛法及其应用.

1963 年，潘承洞证明了下面的结果：命 $k=\dfrac{\log q}{\log A}+1$，此处 q 无平方因子.若 $k\leqslant\log^3 A$，则对于满足 $A<p\leqslant 2A$ 及 $(p,q)=1$ 的所有素数 p，除了不超过 $A^{1-\epsilon}(\epsilon>0)$ 个属于模 $D=pq$ 的例外 L-函数外，当 $\chi_D(n)$ 对 p 本原时，$L(s,\chi_D)$ 在区域

$$\sigma>1-\frac{\frac{2}{q}-\epsilon}{k}\cdot\frac{\log D}{4\log D+2\log(|t|+1)},\ |t|\leqslant T$$

内不为零.

这是兰恩易结果的改良，在他原来的结果中需有限制 $|T|\leqslant\log^3 D$，而这里 T 是无限制的.由这一估计可得下面的应用：命 $N(p,k)$ 表示模 p 的最小 k 次正非剩余，此处 $A<p\leqslant 2A$，则除了不超过 $A^{1-\epsilon}$ 个例外素数 p 之外，恒有 $N(p,k)=O((\log A)^{18+\epsilon})$，其中与"$O$"有关的常数依赖于 ϵ.

除解析数论外，潘承洞的研究领域还涉及其他一些数学分支及其应用.50 年代末，在广义解析函数论及其在薄壳上的应用，数论在近似分析中的应用等方面，1970 年前后在样条插值及其应用，滤波

分析及其应用等方面,均做了一些工作.

潘承洞在山东大学数学系任教的30多年中,始终在教学第一线,为大学生、研究生开设了10多门课程,如数学分析、高等数学、实变函数论、复变函数论、阶的估计、计算方法、初等数论、拟保角变换、素数分布、堆垒素数论、哥德巴赫猜想,等等.他对教学一贯认真负责.他讲解生动,方法灵活,条理清楚,逻辑性强,善于深入浅出地启发学生去理解和掌握课程的要点和难点,深受学生的欢迎.在专心致志于教学、科研的同时,他还积极地和同事们一起为山东大学数学系和山东大学的建设与发展做出了贡献.

(Ⅰ)潘承洞论文目录

[1]论 $\sigma(n)$ 与 $\varphi(n)$,北京大学学报,3(1956),303~322.

[2]On the least prime in an arithmetic progression,科学记录(新辑),1(1957),311~313.

[3]论算术级数中之最小素数,北京大学学报,4(1958),1~34.

[4]堆垒素数论的一些新结果,数学学报,9(1959),315~329.

[5]On the numerical integration of a kind of multiple integrals,科学记录(新辑),11(1959),334~337.

[6]О представлении чётных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, *Sci. Sin.*,11(1962),873~888.

[7]О представлении чётных чисел в виде суммы простого и непревосходящего 4 простых произведения, *Sci. Sin.*,12(1963),455~473.

[8]Новые применения "Большого решета" Ю. В. Линника, *Sci. Sin.*,13(1964),1045~1053.

[9]关于大筛法的一点注记及其应用,数学学报,2(1963),263~268.

[10]О среднем значении к-й степени числа классов для мнимого квадратичного поля,(1964),737~738.

[11]On the zeroes of the zeta function of Riemann, *Sci. sin.*,2(1965),303~305.

[12](与丁夏畦与王元合作),On the representation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime, *Sci. sin.*, 5(1975), 599～610

[13](与丁夏畦合作),一个均值定理,数学学报,4(1975),254～262;更正:数学学报,3(1976),217～218.

[14](与陈景润合作),Goldbach 数的例外集,中国科学,2(1980),219～232.

[15]Goldbach 数,科学通报,数理化专辑,(1980),71～73.

[16]A new mean value theorem and its applications. 见 Recent progress in analytic number theory, Vol. I(Durham),275～287,1981.

[17]一个三角和的估计,山东大学学报(自然科学),4(1982),19～23

[18]A new attempt on Goldbach conjecture, *China Ann. Math.*, 3(1982), 555～560.

[19](与潘承彪合作),On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals(Ⅰ), *Sci. Sin.*, *Ser.* A, 32(1989), 408～416.

[20](与潘承彪合作),On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals(Ⅱ). *Sci. Sin.*, Ser. A, 32(1989), 641～653.

[21](与潘承彪合作),On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals(Ⅲ). *China Ann. Math.* B. 11(1990), 138～147.

(Ⅱ) 潘承洞专著目录

[22](与潘承彪合作),哥德巴赫猜想,科学出版社,1981.

[23](与潘承彪合作),素数定理的初等证明,上海科学技术出版社,1988.

[24](与潘承彪合作),解析数论基础,科学出版社,1991.

[25](与潘承彪合作),初等代数数论,山东大学出版社,1991.

[26](与潘承彪合作),初等数论,北京大学出版社,1992.

[27](与于秀源合作),阶的估计,山东科学技术出版社,1983.

[28]素数分布与哥德巴赫猜想,山东科学技术出版社,1979.

参 考 文 献

[29] Родосский, К. А., О наименьшем простом в арифметической прогрессии,

Матем. Сб., 2(1954), 331～356.

[30] Turan, P., Eine neue methode in der analysis und deren anwendungen, Akad. Kiado, Budapest, 1953.

[31] 王元，哥德巴赫猜想研究，黑龙江教育出版社，1987.

[32] 王元，评潘承洞，潘承彪著《哥德巴赫猜想》，数学进展，16 (1987), 207～210.

[33] Linnik, Yu. V., *Math. Reviews*, 1959, 3, 22 (#2292).

[34] Halberstam, H., *Math. Reviews*, 1970, 33 (#5590).

[35] Fouvry, E., Iwaniec, H, On a theorem of Bombieri-Vinogradov type, *Mathematika*, 27 (1980), 135～172.

[36] Richert, H.E., Aspects of the small sieve, International symposium in memory of Hua LooKeng, Vol. 1, Springer-Verlag and Science Press, 1988, 235～248.

回忆潘承洞*

陈景润才走了一年多，潘承洞又走了．留下了一片空白，一片凄凉．

我是1952年在浙江大学毕业，由政府分配到中国科学院数学研究所工作的．1953年秋进入数论组，师从华罗庚先生研究数论．承洞正是52年考入北京大学数学系．54年，他选择了闵嗣鹤先生的数论专门化．这时，我们成了同行，就认识了．他刚20岁，我比他大4岁．数学所数论组还有越民义，许孔时，吴方，魏道政及进修教师严士健与任建华，56年又调来了陈景润．北大数论专门化还有尹文霖，邵品琮与侯天相．早在西南联大时期，闵先生就是华先生的助手与合作者，所以两个摊子都搞解析数论，彼此关系很亲密．闵先生鼓励他的学生多与数学所数论组的人交流，多向华先生学习．他们常来数学所参加华先生领导的哥德巴赫猜想讨论班，得到了华先生的指导与熏陶．数学所数论组的年轻人也把闵先生看成老师，常向他请教．

承洞性格开朗，心胸开阔，襟怀坦白．他还有一大优点，就是淡泊名利，不与人争．这在数学界是有口皆碑的，所以他有众多朋友．我很喜欢与他交往，我们愈来愈熟了，彼此感到在一起时很舒畅．

---

* 原载《科技日报》，1998年1月17日，或《数学通报》4，1998，1～3．

承洞于1956年以优异的成绩毕业，继续留校做研究生．承洞很有才华，在他做学生的时候，就有突出的表现：命 D 与 l 为两个互素的正整数．又命以 l 为首项及 D 为公差的等差数列中的最小素数为 $P(D, l)$，原苏联科学院院士林尼克于1944年证明了 $P(D, l)$ 的上界囿于 D^C 的著名定理，其中 C 是绝对常数．承洞于56年定出 $C \leqslant 5446$．其后的四十年中，引起了国内外不少著名数学家从事于 C 的估计的改进，他们的论著中总是要引用承洞最初的结果的．

接着“反右斗争”之后，就是“大跃进”．58年夏天又开展了以批判武汉大学数学系党总支书记齐民友而引发的所谓“拔白旗，插红旗”运动．景润作为一个最“顽固”的“小白旗”被调到大连化学所去从事他所不懂的专业．直到几年之后，才被“落实政策”调回数学所工作．数学所数论组的其他人也都受到冲击，说他们搞“理论脱离实际”的东西．哥德巴赫猜想更被说成是“洋人，古人，死人”的“垃圾”．他们纷纷改行了．轰轰烈烈的数论研究就这样沉静下去了．诚如华老在纪念熊庆来先生的诗中所说：“恶莫恶于除根计”．

当时，承洞是在校研究生，他还继续他的学业．这时有一个大学部的学生李淑英跟他相爱．几年后，他们喜结良缘，始终感情很好．承洞与我仍常见面，当然在一起呆的时间不会很长．

60年，承洞研究生毕业了．像他这样可能已被划归为内部掌握的“白旗”了．北京没有单位要他．他被分配到济南山东大学去工作．我为他离开北京良好的研究环境而难过，我们依依相别了．

幸好山大领导不仅未歧视他，而且还相当看重与照顾他，使他能在山大继续从事“理论脱离实际”的解析数论研究工作．这时他已被哥德巴赫猜想迷住了．

首先是匈牙利数学家瑞尼于1947年证明了（1，C），即每个

充分大的偶数都是一个素数与一个不超过 C 个素数的乘积之和. 哥德巴赫猜想本质上就是 (1, 1), 但 C 的上界是什么? 若用瑞尼的方法来计算 C, 这将是一个天文数字, 没有人愿意干.

承洞天才地洞察到瑞尼关于 (1, C) 的证明实质上依赖于一条素数分布的中值公式, 其中有一个参数 Z, 而 C 的值则依赖于 Z. Z 愈大, 则 C 愈小. 按瑞尼的方法, Z 是非常小的. 承洞对这个问题作了重大改进, 证明了 $Z=1/3$ 时, 这一中值公式就成立, 并导出了 (1, 5). 承洞那时非常着迷, 他给我的信件很多, 将他的结果不断告诉我. 当一个数学家做过一件工作而受到阻碍后, 往往轻易不会相信这件工作还会有进展, 这是对自己的迷信与偏见. 我在证明了 (2, 3) 之后, 就陷入这种思维的怪圈之中, 所以我不相信承洞的结果, 每每予以反驳, 承洞再加以解释, 彼此的信都写得很长. 最后在无可争辩的情况下, 还是承认了承洞的 (1, 5). 这段时间, 承洞总共给我写了六十几封信, 淑英大概只收到了两封信, 可见其拼搏之激烈.

正当我承认了 (1, 5) 后不久, 我又收到了原苏联数学家巴尔巴恩寄来的论文, 他也证明了一条中值公式, 结果比承洞的弱一点, 即 $Z=1/6$, 而且未有关于哥德巴赫猜想的应用. 我将承洞的结果告诉了巴尔巴恩. 这时我又收到了承洞证明 (1, 4) 的手稿与巴尔巴恩的信, 信上告诉我, 他已证明了 (1, 4). 我立即将承洞证明 (1, 4) 的方法告诉了巴尔巴恩, 即用林尼克方法将他的中值公式中的 $Z=1/3$ 改进为 $Z=3/8$, 巴尔巴恩回信说, 他证明(1, 4)的方法也是一样的. 这样, 他们二人最后的结果是相同的.

65 年, 庞比尼与阿·维诺格拉多夫独立地将 $Z=3/8$ 改进为 $Z=1/2$, 从而证明了 (1, 3). 庞比尼的结果略强一点, 而且证明方法是独辟蹊径, 十分简练, 从而获得了 1974 年的费尔兹奖.

66 年, 景润证明了 (1, 2), 又将哥德巴赫猜想的记录夺回到

中国数学家的手中了. 图论组合学家王建方在国外访问时, 曾有一个日本学者对他说: "在 50、60 年代, 中国的解析数论着实光辉了一下", 指的就是景润与承洞.

山大为承洞的成就而感到喜悦, 63 年, 山大校庆期间, 数学系请了三个客人, 除夏道行是山大校友外, 闵先生与我显然都是为潘承洞而受到邀请的. 这是我参加工作后第一次出差. 我们被安排住在济南火车站附近的山东宾馆之中. 那时还处于困难时期, 每天能吃饱吃好, 住得也很舒服, 真是福气了. 我庆幸承洞在山东时工作与生活都很愉快.

接着就是"四清", "文化大革命", 大家都未见过面, 当然也不敢见面, 一晃就是十几年.

1976 年, "十年浩劫" 结束了, 春回大地了. 数学所于当年就召集全国各著名大学派代表来数学所商谈 "如何恢复数学研究", "如何制订各个数学领域的发展规划", "如何在全国分工布局" 等重大问题. 一句话, 怎样把二十年损失的光阴追回来. 承洞与我终于又见面了. 大家都没有兴趣谈这些年的遭遇, 我们都憧憬着美好的明天. 他给我带来了两斤花生米, 那时北京每户每月只配给两斤蔬菜, 每人半斤肉, 我已记不得最后一次吃花生米是何年何月了.

1978 年, 党的十一届三中全会召开了. 1979 年 8 月, 我们都应邀参加了在英国达尔姆召开的解析数论国际会议. 同时应邀的还有华老与景润. 景润未能去, 华老与我已从欧洲其他地方先期到达了. 承洞见到我们时高兴极了. 承洞与我都是第一次出国, 在异国他乡能碰见老朋友该多高兴啊. 这一周, 每天我们都去华老屋里, 促膝谈心, 傍晚一起散步, 同桌吃饭. 承洞与我都被安排在全会上作报告. 79 年 12 月 30 日《光明日报》上登有林海采访华老后写的文章, 文章说: "王元与潘承洞在会上作了报告, 不少人用 '突出的成就', '很高的水平' 等评语, 赞扬中国数学家在研究解析数

论方面所作的努力．一些白发苍苍的数学家向华罗庚教授祝贺，祝贺中国老一辈的数学家培养了这样出色的人才．”早在达尔姆会议之前三个月之中，我就在法国与原西德多次作报告，介绍景润与承洞的成就，对于孤立状态下的中国数学家所作出的成绩，赢得了外国同行的高度尊重．

1980 年夏天，承洞安排我与一些较年轻的解析数论学者十多人去青岛进行学术交流与渡假．我们住在海边北海修船厂的招待所里．上午讨论、做研究，下午游泳，每天看着潮涨潮落．平静时，天水一片蓝，偶见几点孤舟．风起时，巨浪拍岸，声若闷雷．承洞是高度近视，不会游泳，也不能单独去海边岩石间与沙滩上漫步．经我多次动员，由我扶着他，我们一起去海边散了一次步．以后，我们又在济南与青岛聚会了几次．淑英每次都同去，她对承洞照顾得很仔细．

1986 年，我当上了全国政协委员，承洞是全国人大代表．每年两会同时开会时，我们就约好在人民大会堂进门休息厅的右侧见面．这时我已听到传闻，他患有肿瘤病，又听说他在手术后，虽用化疗，但恢复得很快．他的造血功能很好，白血球增加恢复得很迅速．这以后，我们在北京一起开会的机会就更多了．如每年的院士会议等．我们总是住在一间房子里．每次我都是最多住一个晚上，一起聊聊天．我注意到他睡眠很好，胃口也不错，可见他的心、肾都很健康．其实，我要求跟他住一屋的真正用心在于我可以住在家里，让他能得到更好的休息．

1992 年，香港大学廖明哲教授邀请承洞偕淑英去港大访问两周．那时我正在香港浸会学院访问，这是我们第二次在海外相聚了．我曾去车站接送他，也陪他玩玩．山东省对他的关怀真让人羡慕．省里一家公司对他照顾得很好，不仅负责接送，还在北角安排了一个单元给他们夫妻住，在香港寸土如金的地方，有此待遇，恐

怕是罕见的．我们还得空在承洞住处自己做了一顿丰盛的晚饭呢．

1994年，国家基金委在香港召开了一个会议，要我们二人参加，承洞很希望我去．大概因为事情太多，我未能去．不久，就听说承洞在香港时，身体欠适，脸色很黄，其实是有新的肿瘤生成了．回济南后即住院治疗，山东省尽了最大努力，在全国遍访名医，手术进行了十一个小时，这是他第三次动手术．承洞竟奇迹般地康复了，不久他居然又可以来北京开会了．

1997年5月，承洞来北京参加院士会，前些日子他的眼睛又成功地动了手术，居然跟常人的眼睛一样了．过去开会时，吃饭与走路都要有人照顾一下他的，现在完全可以自理了，而且显得比平常人更精神一些，朋友们都向他表示衷心地祝贺．

不管怎么说，我们都老了．我对承洞说："从95年，我65岁开始，我又重操中小学生时代的旧业，练习写毛笔字，这对修身与健康都有好处．"我给了他几张我临摹的字看看，承洞很高兴，他说："我也要练字，我们学校有好几位书法家，我还可以请他们指教呢．"

1997年10月，院士会在北京召开．我接到承洞的电话，他说腰痛，大概是骨刺增生，不能来了，我也以为是小毛病，没有在意，只是安慰了他几句．最后他说："山大编辑了一本碑帖，我已托人寄了一本给你．"以后又来过电话，问我收到了没有，直到11月10日我收到了，我们还通过电话，而且我告诉他，"报纸已经登了，济南市给了你一套房子，并配有照片，我们大家都衷心地为你高兴啊．"

12月27日上午，所领导给我电话，告诉我承洞已于临晨二点走了，我被这一消息吓懵了，顿时语塞，也不相信，一个多月前我们还通过电话吗！28日才从承洞的弟弟承彪处得到了证实并得知31日即将火化．他与淑英都不让我去济南．我还是买了31日8点

去济南的机票，同行者还有数学会秘书长李文林.

6点多，我们就到机场去等候了，机场有告示，济南有大雾，航班延期，8点，9点，10点，至11点，才有广播说，10点40分的航班取消了. 我们也只能去办退票手续了. 至12点离开机场. 第二天清晨接到电话："后事已办完，从党政军领导到群众，一千多人向承洞送别，大雾至晚仍未散去."

回忆黄俊雄*

从孙文先那里得知黄俊雄于几天前，由于心脏病突然发作而过世了，感到十分突然．因两年前我在台湾时，还跟他朝夕相处了两个月，他神采奕奕，谈笑风生的丰采还历历在目，怎么可能就走了呢？

我们最早是1991年认识的，其实更早几年，他就寄过一些解析数论论文给我．他的成果很希望得到鉴定．他研究了过于困难的问题，依我的学术水平，实在不可能对这些问题作出鉴定，所以就邀请他来我们所工作一个月，大家可以讨论一下．这样我们就在北京见面了．

我们安排他住在中国科学院“外专公寓”里，距数学研究所约十分钟步行距离，很方便．每周请他在“数论讨论班”里作两次报告．他都很认真地讲，大家边听边提意见，气氛很融洽．我怕他一个人在北京太寂寞，就问他要到那里去玩玩？北京的名胜古迹很多，天坛，故宫，香山，颐和园，圆明园，“不到长城非好汉”呀！他略为想了一下说：“我不想去玩了，我还是搞数学吧！”这也真是少见的了．

又有一次，我问他还缺什么东西吗？他说“到那里去买纸？”我说：“这好办，我给你拿点来就行了．”我给了他一百张白纸．未

---

* 原载台湾《数学传播》3，1997，45～46．

想到，不到一周就用完了，每张纸都写得密密麻麻的，我只好再给他几百张白纸了．这时我才知道，他不仅不游玩，睡觉也是很少的．

一个月很快过去了，临走前不久，贾朝华帮了他一点忙，给他的论文提了一点实质意见．他很感谢．我们研究所为他提供的生活条件还是比较艰苦的，我跟他说："这个月辛苦你了，我们也只有这个条件，望多包涵了"．他说："生活还可以，学术空气很浓，这是最重要的，我很满意．"俊雄是一个实在的人，我相信他说的是真话．

以后来信中，他总是希望我能去台湾访问一下．1993 年，我得到台湾国科会邀请访问三个月．但不巧，我的前列腺肥大要住医院治疗只好放弃了这个访台的好机会，所幸 1995 年，中央研究院数学研究所又邀请我访台两个月，总算成行了．

是姜祖恕与文先到机场去接我的，到达数学所时已快六点了．俊雄和黄启瑞、于靖一起在所里等着我，我们一起去学术交流中心吃了一顿晚饭，往后就常常见面了．

如果条件不成熟，众所周知，困难的数学问题是得不到解决的．因此，这不仅仅是个个人努力问题，即使为了数学而献身亦无济于事．俊雄太着迷于数学了．我担心常此下去，他的身体会受到损伤．因此在中央研究院期间，我想劝他把兴趣挪一下，搞些可能得到成果的问题．

俊雄曾经对某些不定方程有兴趣，我也熟悉这方面，于是我们常常在一起讨论加型方程，企图将 W. Schmilt（施密特）的重要结果作些定量研究．俊雄这样日夜不停地工作，早晨常见到他两眼通红．由于过于疲劳，写出来的东西常会出错．我想俊雄应该休息一下了．

一次，我开玩笑地对他说："你在北京不玩，我到台北可要玩

了，你陪我出去玩玩好吗?”没想到他很认真，当即决定本星期天就由他来安排我玩了.

星期天一早，俊雄和太太一起，到逸仙路我的住处来找我，他说：“我们到圆山饭店吃午饭去!”圆山饭店大名鼎鼎，我早就闻其名了，果然以其宏伟的气魄吸引了我．午饭后，稍事休息，他们又领我去看了台北艺术博物馆，俊雄特别向我介绍了其中台湾一些现代艺术家的作品．他知道江克文和邱小芳已经领我去看过故宫博物院，这是另一种风格，看来俊雄还是很会生活的.

以后，俊雄又约我去他家吃了一顿晚饭．饭前，给我看了一些他的论文及过去得到的奖状，大有今昔之感．我也没说什么．饭后，俊雄说：“你延长一点访问时间好吗?”“如果你不嫌，下次再来台北，欢迎你住我家里.”唉！明知这两点都不可能，对于俊雄的真诚，我就默认了.

两个月很快过去了，欣喜他的论文也完成了，而且投稿到北京《数学学报》(英文版）发表.

俊雄离开了我们，但他的真实诚恳的为人，对数学的执著追求，忘我的工作都将永远留在我的记忆之中.

自　　述

我的数学生活*

一 大学生活（1948－1952）

在中学时，我的爱好很广泛，音乐、绘画、小说、游泳等都喜欢．在各门功课中，我喜欢数学的严格体系与逻辑推理．出于好奇，也喜欢英语．但不是所有功课都能考得高分．在南京读书时，好莱坞文艺电影也看得多了一点，所以中学毕业时，只考取了英士大学与安徽大学数学系．我当时选择数学系是我父亲希望我将来能从事自然科学的研究，更主要的原因是考虑到数学是一个冷门，容易考一些．没想到数学成了我的终身职业，这中间有相当的偶然性．

我选择了英士大学就读．英士大学位于浙江省金华市，无论师资与设备都很缺乏，校舍亦很破旧，颇不像一个高等学府．我很失望，很后悔在中学时没有刻苦用功，从而未能考取一个理想的大学．

1949 年，金华解放了．英士大学奉命解散了，师生均被并入浙江大学．浙大位于杭州市，那里有美丽的西湖，风景如画．浙大是盛名的南方科学研究与教学中心，素有东方的剑桥之称，人才济

---

*《我的数学生活》首先发表于日本《科学》，51:2，1982，89～94；《我的回忆》发表于日本《数学讨论班》，1983，58～60．本文是在这两篇文章的基础上补充改写而成的．

济．苦难深重的中国人民，以欢庆的心情迎接了解放，大家都愿意为建设一个富强、繁荣、和平与民主的新中国而贡献力量．

浙江大学数学系是陈建功与苏步青教授长期工作的地方．他们分别于 1929 与 1931 年自日本学成归国，在浙大奋斗了二十年，为我国培养了好几代数学家，也建立了富有特色的课程设置与教学方法．他们还对科学研究抓得特别紧．我能到梦寐以求的浙大，并在陈、苏二位先生指导下学习，无疑是我这一生中第一次交了好运．

到浙大后，系里有些高年级同学劝我仍从一年级读起，但我还是决定照常插班数学系二年级．我的学习热情异常高涨．刚来浙大时，还去游泳及偶尔参加一些音乐业余活动等．一年后就放弃了一切业余爱好，专心致志于数学．我在大学三年级与四年级时，分别选修了陈建功教授的"复变函数论"与"实变函数论"课．浙大的分析课的精华是"级数概论"课，这门课的讲义是陈先生亲自编写的，课中严格地讲解了极限概念与一致收敛等．实际上，这是一个由中学数学转入大学数学的入门课．虽然以后不一定是陈先生自己授课，但都是用他的讲义．我学的是卢庆骏教授开设的，是在二年级时学的．几何课分为坐标几何与微分几何，都是苏先生自己编写的讲义，后者已正式出书．我学这两门课时是由白正国先生讲授的．近世代数课是按范·德·瓦尔登的名著《近世代数》讲授的，由徐瑞云先生主讲．在这之前，我还选修过郭本铁先生的"矩阵论"，卢庆骏先生的"初等数论"与"高等微积分"．最后一年，选了卢庆骏先生的"概率统计"及张素诚先生的"拓扑学"．当时的助教有谷超豪，张鸣镛等，研究生有龚升，胡和生，夏道行等，人才济济．

浙大四年级时有一个学生讨论班，由老师给每个参加的学生指定一本书，学生自学，然后作报告，老师指导．这是浙大数学系的精华．通过这段学习，大大地提高了学生的自学与独立工作能力，

为毕业后继续提高与从事研究工作创造了条件．在大学四年级时，在卢庆骏先生指导下，我报告过英格姆的名著《素数分布》，并在张素诚先生指导下，报告过几篇拓扑学文章．

在浙大时，给我印像最深的是全系的老师与同学都非常勤奋．例如陈、苏二老还从头学习俄语，并达到阅读专业书刊水平．他们的身教给我深刻的教育，是我终身学习的榜样．

二 哥德巴赫猜想（1952—1957）

我以优异的成绩于 1952 年在浙大毕业，由陈建功与苏步青先生推荐，经政府统一分配我来中国科学院数学研究所工作．由于前中央研究院的数学所已迁至台湾，所以数学所是 1950 年重新筹建的．1952 年正式建所，地址在北京美丽的清华园内，由华罗庚教授任所长．华先生是一个爱国者，他放弃了美国依利诺大学的终身教授职务，于 1950 年率全家回国定居．

1953 年秋，数学所最先成立了数论与微分方程两个组，分别由华先生与吴新谋先生任组长．成立数论组的原因是由于华先生擅长数论，成立微分方程组则是由于考虑到微分方程是数学理论联系实际的一个触角．那时数学所约有二十多人，数论组共六人，除华先生外，有越民义先生及 1952 与 1953 年大学毕业生许孔时，吴方，魏道政与我．还有进修教师严士健（北师大）与任建华（西北大学），微分方程组五人，其他数学家则在多复变函数论，代数，概率统计拓扑学，数理逻辑与泛函分析方面工作．除数学之外，还有人从事力学研究与计算机研制工作．我能跟华先生学习，在我一生中，无疑是又一次交了好运．从此数论成了我的专业方向．这里有一个插曲．我最早是选择泛函分析作为研究方向的，并经关肇直与田方增先生认可．后来要成立数论组，才转而研究数论的．

数论组成立后，华先生组织了两个讨论班．一个是《数论导

引》讨论班，由他自己每周讲授一次．华先生用写一本书的办法来引导学生学习．他在西南联大及美国讲授数论课，曾写过一个约有十多万字的讲稿．他是在这个基础上撰写他的《数论导引》书的．每一章，华先生都先写出一个初稿，约占整章篇幅的百分之六、七十，然后他在讨论班上讲一遍，指定一个人负责补充，并将整章完整地写出来，然后由越先生负责审核与修改补充后交华先生确认定稿．例如其中第九章素数定理与第十九章史尼尔曼密率就是由我负责补充的．仅仅用了两年多时间，全书就写完了，共六十多万字，于 1957 年由科学出版社正式出版．这样做，远比让学生去读一本现成的书要好，学生学习相当投入，有一种当家作主的感觉．这种写书也不同于“放羊”、即完全让学生自己去写书，如果那样做，往往就会前后不连贯，风格各异了．通过《数论导引》讨论班，参加者对数论的基础知识有了较全面的了解与掌握．

华先生自己擅长于指数和估计与圆法，但他一点也不保守．在一次数论演讲中，他指出维诺格拉多夫方法已经成熟了，当前应该研究赛尔贝格筛法与林尼克分析方法．华先生领导的另一个讨论班为“哥德巴赫猜想”讨论班．他组织这个讨论班的着眼点并不是要有人在这个问题上作出成果来，而是由于哥德巴赫问题的研究几乎跟解析数论所有的重要方法都有联系，其中也包括赛尔贝格方法与林尼克方法．以哥德巴赫猜想为主线来学习，就可以学会解析数论的所有重要方法．华先生说：“你们弄懂了解析数论，再学一点代数数论，就可以将解析数论的结果推广到代数数域上去．”

哥德巴赫猜想讨论班原计划分四个单元来进行：

1．史尼尔曼密率，曼恩定理与赛尔贝格 Λ^2 筛法．

2．素变数的指数和估计，西革尔定理与维诺格拉多夫三素数定理．

3．布伦筛法与布赫夕塔布方法．

4．林尼克大筛法与瑞尼定理．

讨论班由学生轮流报告指定的论文，华先生则不停地提问题，务必使每一点都完全弄清楚，有时往往使主讲人讲不下去，长时间站在讲台上思考，这叫做“挂黑板”．有些报告的材料往往在讨论班上就得到了简化，所以讨论班进行得很慢，但参加者得益很大．讨论班并没有按计划完成．只完成了一、二、三单元，即由于“反右斗争”的到来而中断了．

华先生有个看法：凡是能够用得上布伦筛法的地方，都可以用赛尔贝格 Λ^2 方法得到更好的结果．这就使得布赫夕塔布的结果(4，4)，即每个大偶数都是两个素因子个数均不超过 4 的整数之和，有了改进的可能．这个预测对我来说颇具诱惑力．那时我已对筛法产生了强烈的兴趣．

1954 年，波兰数学家库拉托斯基来北京访问．他带给华先生一些波兰数学家的论文单印本，其中有西尔宾斯基与辛哲尔关于数论函数的文章，例如他们证明了存在整数贯 $\{n_i\}$ 与 $\{m_i\}$ 使

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\varphi(n_i+1)}{\varphi(n_i)}=0,\lim_{i\to\infty}\frac{\varphi(m_i)}{\varphi(m_i+1)}=0,$$

其中 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数．华先生与我交谈后发现，用布伦方法可能得到更强的结果．我于当晚就用布伦方法改进了他们的结果．我证明了：任意给出一组非负实数 $a_1,\cdots,a_s$ 及 $\varepsilon>0$，皆存在自然数 n 使

$$\left|\frac{\varphi(n+v+1)}{\varphi(n+v)}-a_v\right|<\varepsilon,1\leqslant v\leqslant s. \quad (1)$$

进而言之，存在仅与 a_1，…，a_s 及 ε 有关的正常数 c 及 X_0，当 $X\geqslant X_0$ 时，在区间 $1\leqslant n\leqslant X$ 中满足 (1) 的整数个数不少于 $cX/(\log X)^{s+1}$．后来，辛哲尔在克服了一些困难之后，又将这一方法用于其他几个数论函数．我们合作了两篇文章，分别于 1956 与 1958 年发表于波兰杂志上．这是我的处女作，使我感到分外喜悦．那时我国数学还较落后，能够和外国人合作两篇文章颇令人关

注，为此《中国青年报》作了大篇幅的报导，使我很早就有了名气．我决定继续这方面的工作．不久我就将不等式（1）中的整数 n 换成了存在素数 p，用的是林尼克与瑞尼的方法．一方面，华先生肯定了我的成绩．另一方面，他又严肃地向我指出："要有速度，还要有加速度"．所谓"速度"就是要出成果，所谓"加速度"就是成果的质量要不断地提高．

我又继续转入哥德巴赫猜想的研究．除布赫夕塔布的论文外，所有用筛法处理哥德巴赫猜想的重要论文我都念过了．但国内找不到布赫夕塔布的文章，正巧这时听说科学院图书馆进口了一批老的俄文数学杂志，我立即到王府井科学院图书馆去借阅．这批杂志尚未编目，堆放在地上．幸好得到管理员的同情，让我就地看看，我花了一整天时间将布赫夕塔布的文章抄了下来．

我很快弄懂了布赫夕塔布方法的实质．它是一个恒等式，有了筛函数的上界估计及一个下界估计，即可以用这一恒等式得到其他点的下界估计．反之亦然，而且在不断的递推过程中，筛函数的上下界估计得到不断的改进，这样就会得到比布伦方法得到的筛函数估计更好得多的结果．在华先生的帮助下，我用 Λ^2 上界方法改进了布伦方法得到的筛函数上界估计，再用布赫夕塔布方法即得到更好的筛函数下界估计．从而我于 1955 年改进了布赫夕塔布的（4，4），而证明了（3，4）．

这时有传说原苏联有个数学家证明了（1，3）．我立即写信给在原苏联留学的大学同班同学孙和生，请他打听一下．他很快回了信，告诉我这是阿·维诺格拉多夫宣布了（3，3），并附来其摘要文章的手抄本．从中我了解到阿·维诺格拉多夫的结果是直接从 Λ^2 下界方法得到的．这一方法应该与我证明（3，4）的方法的强度相当．我很快发现了他的证明中的不足．幸好在添加了新的想法之后，阿·维诺格拉多夫对（3，3）的证明作了更正．

这时，越先生要我注意一下孔恩的文章．我立即注意到他证明了存在无穷多个整数 x，使 x^2+1 为不超过4个素数之乘积．这个结果用（3，4）的方法是得不到的，所以其中必有新意．但国内找不到孔恩的文章．为此华先生专门致函吐朗，请他帮忙设法寄来孔恩的文章．不久，华先生收到了吐朗寄来的孔恩的文章的照相本．

其实，孔恩的方法就是利用筛函数上下界估计的组合来提高结果的强度．我很快将这一方法与我证明（3，4）的方法结合了起来，并证明了（3，3）与（a，b）（$a+b\leqslant5$）．这也就改进了孔恩的结果（a，b）（$a+b\leqslant6$），这时已经可以预料到欲证明（2，3）是完全可能的，但要涉及到一些单重积分的近似计算．数学所正好有一架台式机械计算机，经过几个月的计算，我于1957年春证明了（2，3）．

华先生很高兴，他对我说："真想不到你在哥德巴赫猜想本身就做出了成果，你要是能够再进一步就好了．如果上不去的话，你这一辈子也就是这样了．"这也真让他说中了，想不到我在26岁时就停住了，在攻难题方面不再有进步．但值得庆幸者，还有中国的数学家以后在哥德巴赫猜想上取得了更进一步的成果．

华先生十分注意为数学所网罗人才．陈景润于1953年毕业于厦门大学数学系，由国家统一分配来北京市立四中教书．由于他不适宜做教学工作而被辞退．厦大校长王亚南调他回厦大作图书资料管理工作．由于他的刻苦努力，他将华先生的名著《堆垒素数论》上一个结果作了改进，从而引起了华先生的注意，于1957年将他调来数学所工作．

1954年，闵嗣鹤先生在北京大学数学系开设了数论专门化，共有四个学生．他们与数学所数论组的人关系很密切，常来参加哥德巴赫猜想讨论班．尤其是潘承洞的能力很强，他自学了林尼克方法，并且首先得到了算术数列中最小素数的定量估计：命 $p(l,q)$

表示适合 $p=l(\mathrm{mol} q)$ 的最小素数，此处 $(l,q)=1, q>2$. 潘承洞于 1956 年证明了 $p(l,q)\ll q^{5448}$（林尼克原来的结果为 $p(l,q)\ll q^c$，其中 c 为一个绝对常数）.

华先生还在数论组创导过数的几何与超越数论的研究，可惜均未能得到发展.

三 新的探索（1957—1966）

1957 年进行了“反右斗争”，至 1958 年初逐渐告一段落. 接着就是“大跃进”，并将它与“人民公社”，“总路线”一起并列为“三面红旗”. 左的路线在各地风行，人祸天灾，农业减产，人民生活陷入极端苦难之中.

科学界流行着所谓“厚今薄古”，“理论联系实际”，“拔白旗，插红旗”，“外行领导内行”等，更不用说浮夸风与瞎指挥了. 华先生受到了不公正的批判，被迫靠边站了. 数学所的研究组被解散，代之以军队建制的四个指挥部. 数论组被取消后，一些成员转入一个以运筹学为工作对象的指挥部中，从事线性规划，特别是运输问题数学方法的普及工作. 这期间，我参予执笔撰写过两本小册子，对在中国工业部门普及线性规划起了一些宣传作用.

1957 年冬至 1958 年夏，我被下放到河北省藁城县农村进行劳动锻炼，与农民同吃，同住，同劳动. 这一段时间完全脱离了数学工作.

如何将数学工作直接服务于工农业生产，确实是需要认真考虑的问题. 我从农村回所工作后，就积极到周围几个工业院校去了解他们工作中对数学的需要. 为此华先生和我一起学习过《矿体几何学》并合写过一篇文章.

1958 年，我们注意到原苏联科学院 1957 年的工作总结中提到了两项重要的数学成果：一项是公用事业中的数学方法，即排队

论，另一项为数论在多重积分近似计算中的应用．我还看到一篇关于积分近似计算的蒙特卡罗方法的俄文文章，讲到其中所需要的随机数服从均匀分布等．我曾拿了这篇文章给华先生看，他那天很累，不想看．我说："就看一行吧．"他看完后很兴奋地说："蒙特卡罗方法实质上就是数论中的一致分布论的应用．这就好像隔着一层纸，戳穿了就那么一点点东西．"

1958年，我们见到了卡罗波夫发表于1957年原苏联的《科学记录》上的文章，那是一篇借助于完整三角和估计来构造的多重积分求积公式的文章．1959年，我们又见到他关于多重积分求积公式的极值系数法文章，他证明了：对于任何素数 p，皆存在整数矢量$\underline{a}(p)=(a_1,\cdots,a_s)$使

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{a_1k}{p},\cdots,\frac{a_sk}{p}\right) \ll Cp^{-\alpha}(\log p)^{\alpha s}, \tag{2}$$

此处被积函数是周期的，且有傅里叶展开式

$$f(x_1,\cdots,x_s) = \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1,\cdots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)},$$

其中

$$|C(m_1,\cdots,m_s)| \leqslant C/(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{\alpha},$$

$\overline{m}=\max(1,|m|)$，$\alpha>1$ 及 $C>0$ 为常数．我们记这种函数类为 $E_{\alpha,s}(C)$，$\underline{a}(p)$ 称为模 p 的极值系数．1962年，哪夫卡独立地得到了公式(2)，并称 $\underline{a}(p)$ 为模 p 的好格子点．

这一公式很优美，但要求出矢量 $\underline{a}(p)$，需 $O(p^2)$ 次初等运算．从计算数学的眼光看，只能算是一条存在性定理，因此寻求一个直接的方法很重要．华先生以其敏锐的数学直觉及从具体特例入手的单刀直入研究方法而著称，他建议我先从 $s=2$ 的情况入手．我们很快

证明了如果在公式(2)中将素数换成任意整数 n,(2)的左端都不会比 $Cn^{-\alpha}\log n$ 更好.华先生预测当 $s=2$ 时,用斐波那契贯可达这一误差.

我当时对数论方法的掌握还很不够,实际上是边学边干.斐波那契贯是从 $Q(\sqrt{5})$的单位 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$的连分数展开中得来的.我嫌其系数 1/2 麻烦,所以改用了域 $Q(\sqrt{2})$,其单位 $-1+\sqrt{2}$的系数是整数.假定 p_n/q_n 是$\sqrt{2}-1$ 的第 n 个渐近分数,则我们证明了:

$$\sup_{f\in E_{\alpha,\alpha}(C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{q_n}f\left(\frac{k}{q_n},\frac{p_nk}{q_n}\right)\right|\ll\frac{C\log q_n}{q_n^{\alpha}},\tag{3}$$

这是一个臻于至善的构造性公式.华先生与我将这一结果发表于1960 年的《科学记录》上.这是我们合作的第一篇有意思的应用数学论文.后来发现了原苏联数学家巴赫瓦洛夫也证明了同样的结果,但他用的方法要间接得多.

如何将(3)式推广至 $s>2$ 的情况?首先要推广斐波那契贯(F_n).华先生考虑到 F_{m+1}/F_m 是黄金数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(=2\cos\frac{2\pi}{5}\right)$的渐近分数,他认为应将黄金数推广为一般分圆域 $Q(\cos\frac{2\pi}{m})(m\geqslant 5)$的整底,从分圆域的一组独立单位出发来构造整底的联立有理逼近.这一有理逼近就可以看作是斐波那契贯的推广.

详言之,取分圆域 $R_s=Q\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$,此处 p 为一个素数$\geqslant 5$ 已知这是一个次数为 $s=\frac{p-1}{2}$的实代数数域,它有一组独立单位

$$\rho_l=\sin\frac{\pi g^{l+1}}{p}\Big/\sin\frac{\pi g^l}{p},\quad 1\leqslant l\leqslant s-1,$$

其中 g 是 $\bmod p$ 的一个原根.利用这一组单位可得一组单位 $\eta_l(l=$

$1,2,\cdots$)满足

$$\eta_l > l,\ \eta_l^{(i)} = O(\eta_l^{-\frac{1}{s-1}}),\quad 2 \leqslant i \leqslant s,$$

其中 $\eta_l^{(i)}$ 是 $\eta_l(=\eta_l^{(1)})$ 的共轭数. 已知 $\omega_l = 2\cos\frac{2\pi l}{p}$ $(1\leqslant l\leqslant s)$ 是 R_s 的整底,所以

$$\sum_{i=1}^{s}\eta_l^{(i)} = n_l \text{ 与 } \sum_{i=1}^{s}\eta_l^{(i)}\omega_j^{(i)} = h_{lj}\quad (1\leqslant j\leqslant s)$$

都是有理整数. 于是得到联立有理逼近

$$\left|\frac{h_{lj}}{n_l} - \omega_j\right| = O(n_l^{-1-\frac{1}{s-1}})\ (1\leqslant j\leqslant s).$$

$(1, h_{l1}, \cdots, h_{l,s-1}; n_l)$就可以看作是$(1, F_l; F_{l+1})$的推广. 于是我们得到一个求积公式

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s$$

$$\approx \frac{1}{n_l}\sum_{k=1}^{n_l} f\left(\frac{k}{n_l}, \frac{h_{l1}k}{n_l}, \cdots \frac{h_{l,s-1}k}{n_l}\right). \tag{4}$$

得到这一公式所需的计算量仅为 $O(\log n_l)$. 因此是一个构造性公式,但遗憾的是我们无法估计(4)的理论误差.

这时我见到原苏联数学家沙尔抵柯夫借助于计算机及卡罗波夫方法算出当 $2\leqslant s\leqslant 10$ 时一张关于$(a_1, \cdots, a_s; n)$的表. 这就启发了我放弃我们擅长的用逻辑推导的方法求理论误差的途径,改用模拟的手段,即先用台式计算机算出一个 $s=11$ 时的数据$(a_1, \cdots, a_{11}; n)$,再请计算所的朋友将这一数据所对应的求积公式的数值误差算出来. 结果是颇为理想的. 为此数学所还付给计算所 200 元机时费. 华先生与我将成果写成了两个研究简报及一篇文章,分别于 1964 及 1965 年发表在《科学通报》及《中国科学》上面.

几个纯粹数学的学科,如数论,代数,拓扑学与函数论,在三年"大跃进"中受到了特别大的冲击. 1961 年夏,在颐和园中的龙王庙

分别召开了这几个学科的学术会议. 与会者在会上批判了这几年"左"的破坏. 会后,数论的研究有所恢复. 我参加了会议.

1960 年,潘承洞作为研究生毕业于北大,由国家统一分配至山东大学工作. 他发现匈牙利数学家瑞尼于 1947 年证明的著名结果 $(1, C)$,其中 C 是一个大常数,依赖于中值公式:

$$\sum_{D\leqslant x^{\eta}}\mu^2(D)\max_{\substack{l(\bmod D)\\(l,D)=1}}\left|\pi(x;D,l)-\frac{\mathrm{li}x}{\varphi(D)}\right|$$
$$=O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right), \tag{5}$$

其中 $\mu(D)$ 表示麦比乌斯函数, $\mathrm{li}x=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$, $\pi(x;D,l)$ 表示适合 $p\leqslant x$, $p\equiv l(\bmod q)$ 的素数个数及 A 为一个常数 >5. $(1, C)$ 中的 C 依赖于(5)中的 η,由瑞尼方法得到的 η 很小,所以 C 很大.

潘承洞对中值公式作了实质的改进,他证明了当 $\eta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 时,其中 ε 为任意正数,(5)式成立,当然此时与 O 有关的常数依赖于 ε,并由此推出 $(1, 5)$. 这时我又收到了原苏联数学家巴尔巴恩寄来的论文,他证明了(5)式对于 $\eta=\frac{1}{6}-\varepsilon$ 成立. 我将潘承洞的结果写信告诉了巴尔巴恩. 不久,我又收到了潘承洞将(5)式中的 η 改进为 $\frac{3}{8}-\varepsilon$ 并推出 $(1, 4)$ 的论文手稿. 同时,我也收到了巴尔巴恩的信,信中说他已证明了 $\eta=\frac{3}{8}-\varepsilon$ 及 $(1, 4)$. 我将潘承洞证明 $(1, 4)$ 的方法告诉了巴尔巴恩,他回信说他的证法跟潘承洞的证法是一致的. 这样一来,他们就独立地证明了 $(1, 4)$. 同时,我又指出,从潘承洞的 $\eta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 即可以推出 $(1, 4)$. 潘承洞在这一段时间中是奋力拼搏的,他给我写了约六十封信,但他在北大的未婚妻只收到了两封信.

1965 年,我们得知原苏联数学家阿·维诺格拉多夫将(5)中的 η

改进为$\frac{1}{2}-\epsilon$，从而推出了(1,3)，这样一来，哥德巴赫猜想的记录就落入外国数学家之手了．但阿·维诺格拉多夫的论证不易懂，我对此存有疑惑．事实上，他在以后对其文章作了修正．

幸好有陈景润，他不畏险阻．1965年冬，他证明了(1,2)，其中他用到阿·维诺格拉多夫的公式(5)，此处$\eta=\frac{1}{2}-\epsilon$．1966年，陈景润将(1,2)在《科学通报》上宣布了，以后，这一杂志即因"文化大革命"的开始而停刊，陈景润总算搭上了最后一班车．陈景润证明(1,2)的方法是有创造性的，国外称之为"转换原理"．

这期间值得记述者为我在1958年做了模p的最小原根$g(p)$的估计．特别在广义黎曼假设下，我证明了

$$g(p)=O(m^6\log^2 p),$$

其中m表示$p-1$的互异素因子个数．这一结果与$g(p)=\Omega(\log p)$已相差很近，至今尚无实质改进．1965年我又对阶为s的两两正交拉丁方的个数$N(s)$的上界估计作了改进．上述两个结果都是在有了灵感之后不到一个月之内完成的．

1958年，中国科学技术大学成立，华先生被任命为副校长．他要去科大应用数学系兼课，他要创导"一条龙"教学法．他始终认为数学是一门内在紧密联系的学问，所以将基础课分成微积分，高等代数，复变函数论等分科来讲授是将数学人为地割裂开来了．华先生决定将所有的基础课放在一起教三年．他还兴致勃勃地定了一个颇有雄心的计划，即写一部六、七卷的著作来阐述大学基础课．这一计划由于"文化大革命"的开始而中断．他只完成了二卷共四册，由科学出版社出版．

华先生要我做他的助手．教课的讲义由他先写出百分之七十左右，然后由我补充剩下的部分．补充的部分均为较成熟的教材或我们合作的东西．华先生每周上四小时课，我也上四小时课．我主要讲授

教材中较为技巧性的部分及例题. 若华先生有事, 则他的课就由我代替. 此外, 学校还为我们配有助教, 负责给学生出习题及批改作业. 曾先后担任过我们助教的有韩京清, 邓诗涛与周永佩.

1962 年, 我与吴方一道在科大数学系组织了一个数论专门化. 讲授数论导引, 解析数论及指导毕业论文. 学生有冯克勤, 於坤瑞, 朱尧辰, 王连祥与蒋运财, 再加上前两年来数学所数论组工作的谢盛刚与陆洪文. 这些人都受过我的影响而取得不少成绩, 可惜他们的工作刚开始即因"文化大革命"而中断.

我还与越先生一起协助华先生撰写了他的著作《指数和的估计及其在数论中的应用》. 该书于 1959 年在原东德正式出版.

四 劫难 (1966—1976)

1966 至 1976 年, 整个国家遭受了十年"文化大革命"(简称"文革")的浩劫, 大批老干部, 科学家, 教师, 工程师, 医生与文化艺术工作者都遭到残酷迫害, 研究所与大学的工作都被迫全部停顿了.

幸好华先生得到了毛泽东主席与周恩来总理对他的特殊保护, 从而还未受到太大的冲击, 但亦遭到红卫兵的几次抄家及被造反派批斗了几次. 他虽然还可以较安稳地呆在家里, 并间断地到一些工交部门去普及"优选法"与"统筹法"(简称"双法"), 但不能和学生交谈与进图书馆.

1964 年, 我随数学所的人去吉林省梨树县参加"四清运动", 次年回所. 1966 年即开始了"文革". 我亦遭到抄家与批判. 1966 年 8 月 20 日数学所文化革命委员会筹委会召开了批判华先生的大会. 事前筹委会的一个负责人曾召集华先生的学生越民义, 万哲先, 陆启铿, 吴方与我交谈, 要大家作一个联合发言, 并指定万哲先起草发言稿, 由我来念. 当时大家的思想已被搞乱, 认为理应这

样做．事后反省，很感内疚．1968年，随着“清理阶级队伍”运动的进行．我又被划入了数学所中一个所谓攻击无产阶级司令部的反革命小集团，受到更为严重的迫害．我于1969年冬被下放到湖北潜江“五七干校”劳动，1971年夏回所工作．潜江是个血吸虫流行的区域，一些人曾由于防御不良而被染上血吸虫病，我幸运地未被染上．

1966年冬，我与郭宝文结婚，并于1968年与1972年各得一子．小家庭的温暖是这几年苦难日子能够支撑的巨大力量．

1971年，林彪的“九·一三事件”发生了．周总理自“文革”开始后，就想方设法对科学院进行保护．1972年，他又调走了进驻科学院及其各研究所的“工人，解放军毛泽东思想宣传队”，调来了周荣鑫主持工作，直至1975年．以后，周总理与邓小平副总理又调来胡耀邦，李昌与王光伟来科学院主持工作．他们拨乱反正，大力整顿，科学院开始有了生机．

实际上，从“九·一三事件”后，人们即从短暂的困惑与疑虑中惊醒过来．“文革”到底是什么？这时人们已从“文革”初期的狂热转向冷静．数学所的人悄悄地钻进了“业务”之中，几乎找不到一个真正的“运动”积极分子．

我在政治上受到迫害，生活上亦很困难．刚结婚时，我家被挤住在熊庆来先生家的食堂里，只有10平方米大小．有了两个孩子以后，才给了我一间16平方米的房子．吃饭，住宿与工作都在这间房子里．在晚上小孩子都睡着了，我才能够看书，并借用床的一角当桌子用来写字．

我已经多年不进图书馆，不读书，也不看数学杂志了，当然一点也不会知道国际上的数学发展．1971年，我首先用了两周时间去图书馆看看新书与新杂志，包括美国的《数学评论》．特别我了解到这些年来在丢番图分析方面有了很好的进展，我于是将以前在

科大的几个学生组织起来一起学习. 我们着重学习了贝克尔与施密特的卓越工作.

我们早就知道, 如果要求得公式 (4) 的理论误差, 就必须要一条大定理, 即罗斯代数数的有理逼近定理关于联立逼近的推广. 这一难题已由施密特在 1970 年解决了. 利用他的结果, 我们就证明了 (4) 式两端的差囿于

$$O\left(n_l^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}\right)s+\varepsilon}\right). \qquad (4)'$$

1972 年, 华先生参加了由廖承志率领的一个代表团访问日本. 日本数学家告诉他 "华－王方法" 很成功, 并送给他一本札伦巴主编的论文集, 其中包含一篇哈波论述分圆域方法的文章, 并首次用 "华－王方法" 来命名这个方法. 华先生与我已经多年不来往了, 他专门给我打电话要我去找他一下, 我们研究了这本书, 分享了成果得到承认时的喜悦. 当时哈波还不知道公式 (4) 的理论误差 (4)′已被我们证明了. 从此我们中断了多年的合作又开始了. 我们考虑了用 PV 数来构造高维求积公式, 特别研究了广义斐波那契贯的理论与应用.

在 "文革" 前, 最早是布赫夕塔布 1960 年出版的一本教科书《数论》上将 (2, 3) 列为一条定理, 以后, 西尔宾斯基的书上也写了这一结果. 又见 1963 与 1964 年出版的卡罗波夫, 巴赫瓦洛夫与沙霍夫的书与论文中征引了华先生与我关于分圆域最早的文章. 这时, 在图书馆里, 我见到 "文革" 后期出版的一些书, 如哈贝斯坦与罗斯, 革罗斯瓦尔德的书及不少文章中都引征我这两方面的著作. 我感到成果得到承认时的欣慰. 这无疑是这么多年来辛苦的最大回报.

1972 年, 部分学术杂志开始恢复出版了, 陈景润将他 (1, 2) 的证明全文投稿《中国科学》. 该文被送交闵先生与我审查. 最熟

悉这方面工作的人是潘承洞与我，但那时彼此不能来往，只好由我独自来承担审稿任务．在这篇文章中，陈景润对他原来的证明作了相当简化．这时我们已经见到了庞比尼独立于阿·维诺格拉多夫发表的具有 $\eta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 的公式（5）的证明．实际上，庞比尼的公式中的求和范围可达到 $D\leqslant x^{1/2}/\lim^{B}x$，而且证明很清楚简洁．另一方面，阿·维诺格拉多夫也修正了他的证明．尽管陈景润（1，2）的证明结构很易于了解，但为了慎重起见，每一个证明细节仍应仔细推敲，为此我让陈景润给我整整讲了三天，待一切都清楚无误时，我也顾不得“文革”之极左，在他的文章审稿意见上写下了“未发现证明有错误”．闵先生也支持了他，（1，2）的证明全文终于得以在 1973 年《中国科学》上面世．

我也将与华先生合作的工作整理成三篇论文《论一致分布与近似分析》，分别在《中国科学》1973，1974 与 1975 年发表了．1974 年，华先生曾收到国际数学大会作报告的邀请，他拟去报告分圆域方法及有关问题，可惜未能获准前往．这时华先生与我还策划写一本专著来全面阐述一下近似分析中的数论方法，由我先写出初稿．

1974 年，潘承洞与我之间的联系也恢复了．潘承洞已洞察到陈景润（1，2）的证明关键可以写成一条类似于（5）的中值公式，这样就得到了一个简化证明．当时参予一起讨论的有潘承洞，丁夏畦与我．我们三人合作了一篇文章．

1975 年，方开泰曾来问及我高维求积公式的数论方法问题，这埋下了我们以后二十年合作的种子．

1971 年开始的“乒乓外交”使长期封闭的中国大门开了一下，以后就愈开愈大了．戴维斯是第一个来访的数学家．华先生主持了他的报告会，我去听了报告．接着，曾对中国数学发展作出过重要

贡献的陈省身教授也访问了北京．我去听了他的报告并参与一起座谈．1976 年 5 月，美国数学家代表团一行十人来大陆访问一个月，进行了广泛的交流活动．我向美国代表团报告了华先生与我合作的工作，受到了好评．

五　春回大地

1976 年 10 月 6 日，“四人帮”及其爪牙被捕　这实际上宣告了“文革”的结束．

如同冬去春来，到处充满着生机．当年，数学所就召集全国各著名大学数学系派代表来数学所商讨如何恢复与发展中国数学的问题．1978 年，在成都举行了停顿近二十年的中国数学会年会，我参加了会议并主持了数论组的论文报告．

1978 年 12 月，召开了党的十一届三中全会，决定将党的工作重点转移到现代化建设上来，特别是会议决定了改革开放政策．

我收到了去法国，原西德与英国访问及开会的邀请．我很感谢党和政府对我的信任，批准我一个人单独去这三个国家访问三个半月．这是我第一次出国，也是当时很少几个出国访问的学者之一．1979 年 5 月至 8 月，我先后去法国高等研究院与波恩数学研究所各工作了一个多月，并顺访了法国与原西德一些著名大学，再去英国达勒姆参加了一个国际解析数论会议后回国．在英国意外地碰到了正在英国伯明翰大学访问的华先生及国内来的潘承洞．潘承洞与我都被安排作了大会的全会报告，他与我分别在会上讲述了中国数学家在哥德巴赫猜想及高维求积公式方面的成就．这次访问，我向西方学者多次讲述了中国学者在封闭与极为困难的条件下取得的成就，受到了普遍的尊重与好评．回国后，我又多次作报告，介绍国外的数学研究，教学，管理制度，友好往来及个人感受等．对长期处于封闭状态的科技工作者，无疑是很有兴趣的．1980 年 10 月，

我又参加了以华先生为首的中国数学家代表团对美国作了一个月回访，然后我继续留在美国访问了两个多月，并与失散了三十多年的弟弟妹妹见了面并作短期团聚．直至 1995 年，我又去过四次美国，及日本、加拿大，俄罗斯，新加坡，泰国，菲律宾与香港，澳门及台湾共三十几次，总时间约五年．每次我都按期回国，没有在国外多滞留一天．通过出访，学习了别人的长处，开阔了眼界，也宣扬了我国数学家的成就，广交了朋友．

1979 年 7 月，数学所分成数学研究所，应用数学研究所与系统科学研究所，我留在数学所工作．

春天降临了，可是我已年过半百，进入老年了，如何工作更适宜于我？必须认真思考．我决定一面做研究，一面应将过去的工作整理成书出版．由于研究分圆域方法，我对经典代数数论及丢番图分析也有了一些了解．1978 年，施密特来中国访问，我们有幸相识．1979 年，我们又在达勒姆会面了．1980 年，我去美国，专程到他那里访问了一个星期，并住在他家里，从而了解到他当时从事的研究工作．特别是他用哈代—李特伍德圆法求出了一般奇次型组最小解估计的工作．他的结果可以述于下：

命 $F_i(\underline{x})=F_i(x_1,\cdots,x_s)$ $(1\leqslant i\leqslant h)$ 为 h 个实系数的奇次型（即齐次多项式），其次数均 $\leqslant k$，则对于任何大数 E，皆存在常数 $c=c(h,k,E)$ 具有如下性质：当 $T\geqslant 1$ 及 $s\geqslant c$ 时皆存在整点 $\underline{x}\in Z^s$ 满足

$$0<|\underline{x}|\leqslant T,\quad |F_i(\underline{x})|\ll|F_i|T^{-E},\quad 1\leqslant i\leqslant h,$$

此处 $|F|$ 表示型 F 系数的最大绝对值，$|\underline{x}|$ 表示 $\underline{x}$ 的支量的最大绝对值及与 $\ll$ 有关的常数仅依赖于 k，h，E．

若诸 F_i 的系数为整数，则可以由此导出不定方程组

$$F_i(\underline{x})=0,\quad 1\leqslant i\leqslant h$$

的最小非寻常解估计．

这一结果深深地吸引了我．这是由于施密特将圆法用到了非加型的丢番图不等式组与方程组，而且在多变数之下，最小解的阶估计是臻于至善的．但施密特的结果对偶次型是不对的，例如$F(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 = 0$，除$\boldsymbol{x} = 0$之外，就没有其他实解．这使我想起华先生在50年代曾说过，将解析数论的结果推广到代数数域去的研究方向．我猜想若在全虚域中求解，可能会取消型的次数为奇数的限制，至少对加型方程可以尝试．

从80年代初开始，我就着手学习西革尔关于代数数域上圆法的文章及日本数学家龙泽周雄与三井孝美关于西革尔方法的改进文章．

施密特定理证明的第一步为求出一个加型方程的最小解估计，再用德文坡德与海尔仆朗方法以证明定理对于一个加型不等式成立，最后用“对角化方法”得出一般定理．其中第一步是最关键的．大约用了二、三年时间，我弄懂了西革尔方法并将它用于加型方程，证明了施密特关于奇次加型方程最小解估计在全虚代数数域中的类似．这时加型方程的次数是没有限制的．我将结果的证明详细写出，投交给波兰《算学学报》发表．

1985至1986年，我应邀去普林斯顿高等研究院工作．正巧施密特也在那里．他建议我研究丢番图不等式，并预测他的结论在全虚代数数域中有类似，即对于任意次数的复系数型系成立．在这一年里，我证实了他的猜想．除将论文送交《数论杂志》发表外，我还开始写一本专著《代数数域中的丢番图与方程不等式》来全面阐述代数数域中的西革尔圆法与施密特方法及其应用．这本书于1991年由斯普林格出版社出版了．

70年代末，由于某个昂贵试验，要求用较少的试验次数以得出较好的试验结果来．常用的正交设计法所需的试验次数太多，不

能应用，这就使方开泰来找我商量可否用数论方法来安排试验的问题．我们合作将数论方法加以移植．

首先要建立模型：假定有一个 s 个因素，每个因素有 q 个水平的试验要安排．我们将每个试验对应于 s 维单位立方体 G_s 中一个等距的有理点．这样共约 q^s 个等距有理点，我们在其中确定一个有 $O(q)$ 个点的集合 A．A 在 G_s 中是均匀散布的．在 A 的点上安排试验，这就是所谓的“均匀设计”．由于试验次数一般只有几次至几十次，所以我们需要一些均匀散布的小样本，而过去数值积分法所具备的样本都是大样本．于是我们就借用卡罗波夫的“极值系数法”找到了一批小样本，这样就解决了问题．由此引发了方开泰与我长达二十年的合作．我们将数论方法用于有约束的试验设计问题，统计中的最优化问题，多元分布代表的确定及统计推断等．从 90 年代开始，我们撰写了一本书《统计中的数论方法》来阐述我们合作的结果，由方开泰负责执笔，由我补充．这本书已于 1994 年由卡普曼—霍尔出版社出版．

“文革”结束前，华先生与我即着手写第一本书《数论在近似分析中的应用》，这是总结高维求积公式的数论方法，其中包括华先生与我的工作．该书于 1978 年由科学出版社出版，被列为该出版社的“纯粹数学与应用数学丛书”第一册．那时，斯普林格出版社愿与科学出版社联合用英文出版一些中国数学家的著作．本书的英文版于 1981 年由他们联合出版．更早些，日本数学家江田义计将这本书译成了日文，由于英文版的面世而未出版．

我又应新加坡世界科学出版社之邀，编辑出版了《哥德巴赫猜想》一书，于 1984 年面世．

美国布克豪司出版社要华先生写一本书，总结他这许多年来在中国工交部门普及应用数学方法的书．他将这一写作任务交给了我．我根据他过去发表的文章及他的手稿与撰写的提纲写了一本书

《在中华人民共和国普及数学方法的个人体会》，于 1989 年在布克豪司出版社由我们合作发表．可惜华先生未能见到书的出版．

1985 年，华先生不幸逝世，在他身前，我曾写过文章介绍他的数论工作，登于斯普林格出版社出版的《华罗庚文选》上，得到他本人的好评．我也写过一些与华罗庚生平有关的其他文章，这使我萌发了为他写一个传记的念头．他的学术成就，刻苦努力与自学成才的经历，热爱祖国与甘为人梯的情操，无疑对后人有激励作用．我将这一想法告诉他，他表示同意．以后他又给了我一张纸条写有他本人希望写的内容．实际上，主要是他的数学工作，此外，只涉及到在“文革”中，他所受到的迫害，他对青年的关怀与他所从事的数学普及工作．特别说到，他小时候的事情就不要写了．

如果按照华先生的意见来写，恐怕只有数学专业工作者会有兴趣，对他们可能有些参考价值，一般人是不会有兴趣的．于是我决定较全面地写一下．除他的学术工作外，还应将他所处的历史背景，他的老师，朋友与学生也尽量作个交代．他的欢乐，傍徨与劫难也应该写出来．我尽量寻找一切资料．特别，1991 年在香港中文大学访问时，我充分地利用了该校“大学服务中心”中的丰富资料．我对当时的人与事，反复加以核实，务求真实．写作过程中，我还得到了华先生家属的支持与帮助，得到了我父亲的帮助，他以九十高龄为我搜集资料，审阅手稿并提出意见．

共有三十多万字的长篇传记《华罗庚》终于在 1994 年由开明出版社出版，第一次印刷一万多本．同时，台湾九章出版社出版了繁体字版二千本，均销售一空．我还让“希望书库”无偿印刷一万册，供农村的农民与学生阅读．本书出版后颇引起各方面，特别是知识分子的关注．江苏电视台将本书改编为八集电视连续剧，已于 1998 年在中央电视台一台与八台各播过了一次．斯普林格出版社决定将该书译成英文与日文出版．英文本是由肖文杰先生翻译的，

我与他是在 1979 年达勒姆会议上相识的. 以后, 他曾翻译过《数论导引》并帮助我修改过《代数数域上的丢番图方程与不等式》的英文. 日文本是由村上信吾先生及汉语专家仓桥幸彦先生合译的. 我与村上信吾先生是 1983 年在日本相识的, 以后又多次在中国见过面.

1996 年以后, 我先后应湖南教育出版社, 斯普林格出版社与山东教育出版社之约, 准备与审订过去发表过的论文与报刊文章, 准备出版我个人的论文选集. 1995 年之后, 我开始练习毛笔字.

除了学术工作之外, 我担负了一些行政工作. 1984 至 1987 年, 我任中国科学院数学研究所所长. 这期间做的主要工作是与副所长杨乐一起提出将数学所办成面向全国开放的开放型研究所. 这一倡议得到了科学院卢嘉锡院长与周光召副院长的支持, 也得到了中国数学界的资深数学家的支持. 自此以后, 数学所为国内数学家, 特别是边远地区的数学家提供了从事研究工作与交流学术的条件, 受到国内数学界的广泛好评.

1983 至 1987 年, 我被选为中国数学会副理事长. 1988 年至 1992 年任中国数学会理事长. 在这段时间中, 我着力抓了数学的出版工作: 我尽量邀请中国数学家将他们的专长与贡献写成英文专著, 并送到国外出版, 从而将一批数学家推上国际数学舞台; 主持翻译出版原苏联数学大百科全书; 担任《数学学报》主编, 并主持改组编委会, 使之年轻化. 我先后参与并筹划了由数学会负责评选的由亿利达公司捐资的陈省身数学奖及由湖南教育出版社捐资的华罗庚数学奖. 我参与主持了在北京召开的第 31 届国际数学奥林匹克比赛. 值得一提的是我主持了修改中国数学会章程, 将理事长不联任列入了会章.

我于 1956 年由实习研究员提升为助理研究员, 1963 年提升为副研究员, 1978 年提升为研究员, 1980 年当选为中国科学院数学

物理学部委员（院士）．1992 至 1998 年被选为数学物理学部常委，1992 至 1996 年被选为数学物理学部副主任，1997 年当选为中国科学院主席委员．1986 至 1990 年，当选为中国科学技术协会常委委员．1986 年以后任全国政协委员．1982 年，我与陈景润及潘承洞一起，由于哥德巴赫猜想的研究而获得国家自然科学一等奖．1987 年与华先生一起，由于数论在近似分析中的应用研究而获得陈嘉庚物质科学奖．1994 年，我获得何梁何利数学奖．1998 年，接受香港浸会大学授予的名誉理学博士．

我的青少年*

一　童　年

我出生时，父亲王懋勤是国民政府浙江省兰溪县县长．待我能记事时，父亲已调至浙江省政府民政厅第一科科长．我家就住在杭州荷花池头一个独门独院里．在我们的亲戚中，我们家的经济较富裕．我的祖母、两个姑母与姑父、叔叔都和我们住在一起，是个大家庭．我的母亲汪级秋是苏北宿迁县人，忠厚老实．由于我弟弟王克只比我小一岁，由我母亲带，所以我是由祖母带大的．我是长子，在家里颇受宠爱．我在四岁时就进入幼稚园，听说我很腼腆，常常独自坐在墙角里咬衣服尖，等着家里人接我回家．

刚入小学，抗日战争就爆发了．举家内迁．到那里去呢？全家坐火车南逃，我们在长沙停了一个月．一路上兵荒马乱，我记得见到国军鞭打逃兵，惨不忍睹．以后又继续逃到柳州，住了一个多月．那时，姑父与叔叔都在柳州西南公路局做事，在他们帮助下，与他们家一起，坐汽车经贵阳到了重庆．

在重庆住了不久，就遇到日军空袭大轰炸，我们家只能辗转往乡下搬，最后落脚在江北县悦来场．这时我已十岁（1940 年），我才开始正规地进了小学．在逃难的颠簸途中，父亲教我语文与算术，所以学业还没有完全荒废，这样一共上了两年小学就毕业了．

* 原载《中国科学院院士自述》，科学出版社，1996．

第一年进的是家旁的一个小学，第二年转入高峰寺小学．学校与我的家隔着一条嘉陵江，我与王克就住校了，每周父亲接我们回一次家．

那时生活极苦，吃的是有霉味的平价米，米里还有不少杂物，需仔细挑选后，才能煮着吃．穿的是平价布，由我父母在油灯下帮我们缝．我们整天在野外玩，抓青蛙，摸鱼，我还敢抓住蛇尾巴，抖一抖，它就不动了．

我 11 岁时，父亲借来一本儿童读物《爱的教育》，由他读给我听，慢慢地我就能自己读了．我被书中充满了友爱的情节深深感动，人是需要爱的，也应该施爱于他人．

另一值得记述的事是我 11 岁时，我与王克去屋后面的水池帮家里抬水，三岁的小弟弟王光跟着我们去玩，他不慎掉进了水池，我那时还不会游泳，就毅然跳进水里，幸好水只齐腰深，我把他抱了上来．

二 中 学

我 12 岁时，我与王克同时考取了位于合川的国立二中，并在暑假学会了游泳．那时考取二中是一件令人羡慕的事．扬州中学是二中的老底子，绝大部分老师与同学都是逃难到四川来的所谓“下江人”，大家格外亲切友爱．我们住校，每年寒暑假才回家．二中就像一座音乐学校，同学自己将竹子锯成筒，蒙上蛇皮，做成二胡，几乎人人拉二胡，丝竹之声，充满了学校．我的二胡是我们班里拉得最好的，我喜欢刘天华的作品“良宵”，“病中吟”，“空山鸟语”等．我也喜欢画画．虽然也画得不错，但我只会临摹，自己却创作不出一张像样子的画来．我还喜欢书法．这些方面，对于提高我的文化素养的帮助极大．正课中我最喜欢数学与英语．我喜欢数学理论的精确与严格的逻辑推导方法，尤其喜欢平面几何“假设，

求证，证明”这一套程式，它需要我们对矛盾进行细致分析，逐步深入思考，有时还要加几条辅助线才能证明出结果来．每当一个问题经过反复思考后，才找到了解决问题的线索，总能给我带来喜悦与满足．我喜欢英语，这是由于接触到一种新的语言，她的语法与汉语完全不同，对初学者是较困难的，这样反而激发了我的好奇心与钻研劲头．我不喜欢一些以叙述为主的功课，我觉得自己看看书就都懂了．我还喜欢一些课外活动，如到野外露营，自己支个锅炒菜煮饭吃，晚上还偷营，也喜欢到周围去远足．

我 14 岁时，父亲辞去国民党党部工作，去中央研究院工作，历任总务主任，主任秘书等职．我们家仍住在悦来场．我 16 岁时，国立二中奉命解散，迁回江苏省丹阳县，我即离校随家里搬至重庆中央研究院宿舍住，在那里等候迁回南京，那时父亲已先期到南京接收．我们家的斜对门住着建筑学家梁思成．我们两家都只有一间房子，每天看到他这位瘦弱的老人，不是躺在床上看书，就是坐在打字机旁打论文．他的勤奋与刻苦，给我留下了终身难忘的印象．

我 16 岁时，全家搬至南京，住在中央研究院成贤街宿舍．我转入南京社教附中（后改为市立六中）就读．我们家的邻居有天文学家张钰哲，气象学家赵九章，历史学家傅斯年，经济学家邹宝三等．那时国民党很腐败，物价不断上涨，可是这些科学家仍然坚持科学研究，过着清贫与困难的生活，他们是高尚的人．由于社会的动乱，我又看了较多的美国文艺电影，再加上我的功课中只有数学与英语较好，我 18 岁时，高中毕业了，我报考了六所大学，只有英士大学与安徽大学录取了我与王克．到这个时候，我才后悔没有好好读书．

三 大 学

进了金华英士大学数学系后，我感到很失望：没有正规校舍，

亦无甚图书设备，连课也开不齐全．不到半年，解放军就渡江了．那时父亲已随中央研究院机关去了广州，屡次来信催我们南下．目睹国民党的腐败，兵败如山倒，看来气数已尽了，又听说北大、清华均已恢复召生上课，所以我们决定留校等待解放，再全家团圆，然后重新参加高考，改变我的处境．

金华解放后，好运气来了，英大理工科学生被并入南方的最高学府之一浙江大学继续就读．金华这一年，我们基本上没有上课，到了浙大，是再上一年级，还是上二年级？我决心闯一闯！这一年，我选了九门课．经一年拼搏，我门门都得到了高分．我一跃成为浙大的高材生了．

浙大在美丽的杭州，人杰地灵．尤其是她有一批著名学者，如我们数学系的分析学家陈建功，几何学家苏步青；我们理学院还有核物理学家王淦昌，有机化学家王葆仁，遗传学家谈家桢等．我听到陈建功，卢庆骏，张素诚，徐瑞云，白正国，郭本铁等教授的精采讲课．特别那时陈老与苏老都已年过半百，仍从字母开始学习俄语，直到能翻译俄文数学书．他们跟年轻教师一道组织讨论班，互相切磋．这种精神深深地教育了我．

在浙大期间，家里已不能接济我们．除免去学费与食宿费外，生活费用方面，我曾得到父亲的同事与亲戚的资助．中央研究院代理总干事，物理学家钱临照就给我们寄过钱．我还参加半工半读，如改低年级同学的习题本及理发等．

来浙大的第三年，我参加了陈老与苏老独创的在教师指导下的学生数学讨论班．我在讨论班上报告了英革姆著《素数分布理论》．从第三年开始，每周我就只听四、五节课，其余时间都自学数学．来浙大的第一年，我还参加过学校的小提琴队，以后我就毅然放弃了这些业余爱好，将全部身心都投入到数学的学习．三年很快过去了．由于我的学习成绩优良，陈老与苏老推荐我来科学院工作．

好运气又来了，那时数学家华罗庚已回国，出任数学所所长．他那时刚过四十岁，年富力强．我幸运地拜他为师，向他学习数论．从此以后，我走上了一条通常数学家所走之路．

我与数学*

当一个人在某方面小有成就时，人们就会对他是否在小时候就有某方面的特殊才能或经历感到兴趣．这也是人之常情，但实际上，常常不见得有什么特殊才能．

从我记事时起，知道我家住杭州．父亲是省政府的一个科长，家境较富裕．我七岁时，抗日战争爆发．父亲辞职，举家向内地逃难．途经浙江、江西、湖南、广西、贵州，经过几个月的跋涉，才逃到了四川重庆，受尽艰辛．虽然父亲在重庆又重新就业，但抗战时期的生活是非常艰苦的．在重庆住了不久，就碰上了日寇的大轰炸，我们家不得不向乡下搬．一直到抗战胜利搬回南京的八年中，我们家都住在江北县的农村，大部分时间住在悦来场．

由于经常搬家，在小学的六年中，我大概正规在校的时间还不足三年，其余时间都是父亲在家里教我．我经常跳级，所以仍在我12岁时，小学毕业．我父亲没有念过正规大学，是自学成才，通过浙江省公务员考试而逐渐步入仕途的，母亲是家庭妇女，大约是小学文化程度．父亲很聪明，可以教我小学的语文与算术，但算术的道理深究一下，他就说不清了．

我小时候很爱玩，我还有两个弟弟与两个妹妹．父亲要工作，母亲要操持一家人的吃饭与穿衣，无暇管我们．乡下很好玩，抓青

---

* 原载《第二课堂》，广东教育厅，5，1998，4～6．

蛙，抓鱼，爬树摘果子，游泳等，我都很喜欢．小学时，我对数学既谈不上讨厌，也谈不上特殊爱好．

我就记得我接受一个新的数学概念总比别人慢一些．倒不完全由于我的脑子笨，我不愿意盲目地死记硬背，“套公式”，而是要打破锅子问到底，弄懂其中的道理，所以往往需要一个较长时间的思考，才能逐渐体会与了解．因此，一旦掌握了就比较牢固．例如我第一次感到困难的是学习分数，弄不懂为什么分数加减必需先通分，其实是不了解分数的含义．例如为什么二分之一等于四分之二呢？我就不明白，恐怕至少经过了半年，我才逐渐明白了，原来一张饼切成两块，其中的一块就等于将一张饼切成四块中的两块是一样的．也就是说，分数的分子与分母各乘一个相同的非零数之后，分数是不变的．这样一来，分数的运算规则也就自然懂得了．

在小学的最后一年里，学的是“四则杂题”解法，其中最典型的问题是“鸡兔同笼”问题．例如一个笼子里放有鸡与兔子共 8 只，它们共有 20 只脚，问鸡与兔子各多少只？我不愿意套用老师教的解题公式，因为我不明白这个公式的来由！慢慢地我想到了，如果 8 只都是鸡，那么应该是 16 只脚，可见一定有兔子，于是减少一只鸡，即 7 只鸡，一只兔子，这时共 18 只脚．再减一只鸡，即 6 只鸡，两只兔子，这时正好 20 只脚．我就是用这种笨的推移法解决了这类问题的．再回过头去看看书上的公式也就容易了解了．就这样举一反三，我就会解一些别的类型的“四则杂题”，没有公式的问题也难不倒我．每当我有了新的体会时，总是给我带来莫大的喜悦与满足．抗战时期，好的中学很少，我考取了当时最好的国立二中与中大附中．

我进了位于合川县的国立二中，每当寒暑假才回家．念了四年，回到南京又读了二年，毕业于南京市立六中．中学这六年是正规念的．在中学阶段，我的兴趣很广，喜欢拉二胡，绘画与书法，

还喜欢看小说，下象棋，打桥牌与游泳等．在初中时的英语，作文与书法比赛中，我都拿过名次．但有不少功课，我的考试成绩并不好，所以总成绩仍属中等．

数学是我爱好的一门功课，我接受新概念仍很慢，但经过一段思考之后，总是掌握得很牢固，例如当学到代数时，我非常兴奋地看到小学时非常困难的"四则杂题"怎么变得这么容易．只要列出方程就可以立即解出答案来．我更喜欢平面几何的严格推理及"假设，求证，证明"这一套程式．在高中时学了三角课，我很高兴地看到了直角三角形边与角的关系的实际应用，例如可以测量房子的高度与河的宽度．学了解析几何，我又一次兴奋地看到用代数方法可以很容易地解决一些困难的平面几何问题，几乎可以不要动脑子了．在南京的两年中，我看了过多的电影，不算很用功，所以只考上了英士大学与安徽大学的数学系．父亲希望我成为科学家，见到我对数学爱好，就鼓励我考数学系．另一方面，数学系也是一个冷门，比较容易考上．

在英士大学读了一年，金华解放了，我的第一次好运来了，我随英士大学并入南方最有名的浙江大学数学系就读，那时我 19 岁，浙大数学系有良好的学术环境，陈建功院士与苏步青院士长期在那里工作．我几乎放弃了一切业余爱好，全身心地投入于数学学习．由于我善于认真思考每一个新的概念，所以掌握得很牢，而且我还不停地将新的知识与过去的知识加以比较与总结．浙大虽有良好的老师，但我更愿意依赖自己的思考与努力，因此独立工作与学习的能力愈来愈强了．

大学毕业了，陈、苏两位老师推荐我到华罗庚院士那里工作．我的第二次好运降临了，政府分配我来中国科学院数学研究所工作，师从华罗庚院士，研究数论．由于我在大学得到了较好的基础训练及我的独立学习与研究的能力较强，在华老师指点下，很快作出了成绩．从此走上了一条数学家通常走的路．

回忆在南京的日子*

1946年秋至1948年秋，我是在南京度过的，在市六中读完了高中.

在此之前，我随家人逃难在四川，在那里住了八年. 当抗战胜利的消息传来，而我们终于踏上回乡的归程，那心情，是多么的激动啊！盼啊，盼啊，我们终于在南京安下了家. 我家当时住在鸡鸣寺路一号，中央研究院宿舍，门对面就是中央大学. 南京的一切对我都是那样的新鲜，雄伟庄严的中山陵、幽静旷逸的明孝陵、风景秀丽的玄武湖，都是我和同学们常去的地方. 每天上学，我还两次路过新街口. 那时，孙中山的铜像还立在新街口广场中央. 每次路过，都好像孙先生在和我打招呼. 南京夫子庙古色古香的小店，以及各种游艺场所，也常常令我留连忘返. 经过了八年逃难生活的我，是多么希望从此过上一段太平的日子啊！

可是国民党反动派却加紧准备打内战，物价天天上涨，日子真难捱啊. 爸爸刚发薪，全家立刻出动，分头抢购柴米油盐，因为物价早晚是不一样的. 还要把剩下的法票兑换成"袁大头"（即银元）以避免贬值.

我和同学们还常到对门的中央大学里去玩，在里面理发、游泳、看表演. 有时也见到大哥哥大姐姐们集会，反对国民党发动内

* 原载《南京日报》，1983年10月8日.

战．那时候，国内阶级矛盾异常尖锐，一方面是哀鸿遍野，民不聊生，一方面是贪官污吏大发国难财，整日花天酒地，作威作福．日寇入侵，大片国土沦陷，国民党不战而退．等到共产党领导人民打败了日本侵略者，国民党却出来争天下，吃天下了．那时我年纪不大，就觉得国民党真是既腐败无能，又寡廉鲜耻．

那时我还懂事不多，但总觉得国家前途、家庭前途、个人前途茫茫然，再加上我贪玩，爱看电影，就这样稀里糊涂混毕业了．

毕业时，我才猛省自己没有好好读书，但后来总算考取了两个最差的大学．我选择了浙江金华的英士大学．1948 年秋，我带着茫茫然的心情，悄悄地离开了下关车站．

附录：王元学术著作目录

I 文章

1. 表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和，数学学报，6:3，1956，500～513.
2. 表大偶数为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和（广义 Riemann 猜想下之结果），数学学报，6:4，1956，565～582.
3. 关于函数 φ (n)，σ (n) 与 θ (n) 某些性质的一个注记，Bull de L'Acad. pol、des Sci；4，1956，207～209（英，俄文，与 A. Schingel 合作）.
4. 整值多项式的某些性质，数学进展，3:3，1957，416～423.
5. 论筛法及其有关的若干问题，科学记录（新辑），1:1，1957，9～11.
6. 论筛法及其若干应用，科学记录（新辑），1:3，1957，1～4.
7. 表大偶数为两个殆素数之和，科学记录（新辑），1:5，1957，215～218.
8. 关于函数 φ (n)，σ (n)，与 θ (n) 某些性质的一个注记，Ann. Pol Math；8，1958，201～213，更正：19，1967（英文，与 A. Schingel 合作）.
9. 论数论函数 φ (n)，σ (n) 及 d (n) 的一些性质，数学学报，8:1，1958，1～11.
10. 论尤拉函数 φ (n) 的一些性质，西北大学学报，1958，15～23，（与任建华合作）.

11. 论筛法及其有关的若干应用（Ⅰ）（表大整数为殆素数之和），数学学报，8:3，1958，413～429；参见：中国科学，4，1959，357～381.

12. 论筛法及其有关的若干应用（殆素数的分布问题），数学学报，9:2，1959，87～100；参见：中国科学，12，1962，1607～1624.

13. 关于素数的最小正原根，科学记录（新辑），3:5，1959，135～139.

14. 论素数的最小正原根，数学学报，9:4，1959，432～441；参见：中国科学，1，1961，1～14.

15. 关于多重积分的近似计算的若干注记，科学记录（新辑），4:1,1960，6～8（与华罗庚合作）.

16. 表整数为素数及殆素数之和（条件结果），数学学报，10:2，1960，168～181；参见：中国科学，8，1962，1033～1054，附新附录.

17. 某类函数插值公式的一个注记，中国科学，10:6，1961，632～636（英文）.

18. 关于在等高线图上计算矿藏储量与坡地面积的问题，数学学报，11:1，1961，29～40（与华罗庚合作）.

19. 论积分的近似计算及其应用（数论方法的应用），数学进展，1，1962，1～44.

20. 有限与无穷，离散与连续，科学通报，12，1963，4～21（与华罗庚合作）.

21. 关于特征和的估计及其应用，数学进展，7:1，1964，78～83.

22. 给定阶的两两正交拉丁方的最大数目，中国科学，13:5，1964，841～843（英文）.

23. 丢番图逼近与数值积分（Ⅰ），科学通报，6，1964，518～520（与华罗庚合作）.

24. 丢番图逼近与数值积分（Ⅱ），科学通报，6，1964，520～521（与华罗庚合作）.

25. 一类函数插值公式的注记，中国科学，14:4，1966，629～631（英文）.

26. 相邻素数差的注记，中国科学，14:5，1965，786～788（英文）（与谢盛刚，於坤瑞合作）.

27. 关于素数分布的两个结果，中国科学技术大学学报，1，1965，32～38（与谢盛刚，於坤瑞合作）.

28. 关于近似分析中的数论方法的几点注记，中国科学技术大学学报，2，1965，213～218（与朱尧辰，蒋运财合作）.

29. 多维周期函数的数值积分，中国科学，14:7，1965，964～978；参见：中国科学技术大学学报，1，1966，1～12（与华罗庚合作）.

30. 关于一类函数的插值公式，科学通报，9，1996，389～391.

31. 关于s阶的两两正交拉丁方的最大数目（筛法的应用），数学学报，16:3，1966，400～410.

32. 论一致分布与近似分析（Ⅰ）（数论方法），科学通报，3，1973，112～114（与华罗庚合作）.

33. 论一致分布与近似分析（Ⅱ）（数论方法），科学通报，4，1973，165～166（与华罗庚合作）.

34. 论一致分布与近似分析——数论方法（Ⅰ），中国科学，4，1973，339～357（与华罗庚合作）.

35. 论一致分布与近似分析——数论方法（Ⅱ），中国科学，3，1974，220～235（与华罗庚合作）.

36. 论多维圆变函数的数值积分及其应用，中国科学技术大学学

报，1，1974，39～67（与华罗庚合作）.
37. 论一致分布与近似分析（Ⅲ）（数论方法），科学通报，12，1974，559～560（与华罗庚合作）.
38. 论一致分布与近似分析（Ⅲ）（数论方法），中国科学，18:2，1975，184～198，（英文，与华罗庚合作）.
39. 表大偶数为一个素数及一个殆素数之和，科学通报，8，1975，358～360（与潘承洞，丁夏畦合作）.
40. 表每个大偶数为一个素数与一个殆素数之和，中国科学，18:5,1975，599～610，参见：山东大学学报，2，1975，15～26（与丁夏畦，潘承洞合作）.
41. 关于 Davenport 一定理的注记，数学学报，18:4，1975，286～289.
42. 代数整数的联立丢番图逼近的一个注记，中国科学，20:5，1977，563～567（英文，与华罗庚合作）.
43. 关于 Goldbach 数的 Linnik 方法，中国科学，20:1，1977，16～30（英文）.
44. 高维数值积分的数论方法，应用数学学报，1:2，1978，106～114（与张荣肖，徐广善合作）.
45. 关于与圆域的独立单位系，自然杂志，5，1978，6（与华罗庚，裴定一合作）.
46. 关于线性型的一个转换定理，数学学报，22:2，1979，237～240（与於坤瑞，朱尧辰合作）.
47. 关于线性转换定理的一个注记，中国科学，6，1979，559～562（与 W. M. Schmidt 合作）.
48. 关于一次同余方程组的转换定理，西北大学学报，2，1979，12～23；参见：数学学报，24:2，1981，303～307（与王连祥，任建华合作）.

49. 丢番图逼近中的某些测度定理的一个注记，IHES/M，297，1979；参见：数学年刊，2，1981，1～12（英文，与于坤瑞合作）.

50. 数论在近似分析中的应用，见“Recent progress in analytic number theory” Edited by H. Halberstam and C. Hooley，Vol 2，Acad Press，1981，111～118（与华罗庚合作）.

51. 关于均匀分布与试验设计（数论方法），科学通报，2，1981，65～70（与方开泰合作）.

52. 丢番图逼近与近似分析，科学通报，19（1981），1153～1156.

53. 高维数值积分的数论方法（Ⅱ），应用数学学报，5:4，1982，412～417（与徐广善，张荣肖合作）.

54. 丢番图逼近与近似分析（Ⅰ），数学学报，25:2，1982，248～256（英文）.

55. 丢番图逼近与近似分析（Ⅱ），数学学报，25:3，1982，323～332（英文）.

56. 用数论网格法近似求解 Cauchy 问题的一个注记，数学年刊，3，1982，451～456（英文）.

57. 代数数域上的加型方程，科学通报，3，1985，161～164.

58. Goldbach 问题的一个条件结果，数学学报（新辑）1，1985，72～78（英文，与单墫合作）.

59. 一组丢番图不等式，科学通报，9，1987，641～643.

60. 代数数域加型方程解的上界Ⅰ，Acta Arithi；48，1987，117～144（英文）.

61. 代数数域加型方程解的上界Ⅱ，Acta Arith；48，1987，307～323（英文）.

62. 近似分析中的数论方法．Cont，Math，AMS，77，1988，

63～82（英文）.
63. 代数数域中的丢番图方程与丢番图不等式，Cont，Math；AMS，77，1988，83～94（英文）.
64. 代数数域中型的丢番图不等式，J of Number Theory；29:3，1988，324～344（英文）.
65. 关于齐次加型同余式，中国科学（A），1988，1009～1018.
66. 有限域上二次型的最小零点，J. of Number Theory，31:3，1989，272～284（英文）.
67. 应用统计中的数论方法，数学年刊，11B，1990，51～65（英文，与方开泰合作）.
68. 应用统计中的数论方法（Ⅱ），数学年刊，11B，1990，384～394（英文，与方开泰合作）.
69. 最优化序贯程序及其在回归分析中的应用，见 Lecture Notes in Contemporary Mathematics，edited by Wang Yuan etc，1990，17～28（英文，与方开泰合作）.
70. 伪随机序列在统计中的应用，Proc. Asian Math. Conf；1990，135～139（英文，与方开泰合作）.
71. 华罗庚——生平与工作简介，见 Number theory in honor of Hua Loo Keng，edited by Gong Sheng etc，Springer-Verlag and Sci. Press，1991，1～14（英文）.
72. 代数数域中的 Waring 问题的推广，见 Number theony in honor of Hua Loo keng，edited by Gong Sheng etc. Springa Verlag and Science preso，1991，265～277（英文，与 M. V. Subbarao 合作）.
73. 最优化中的序贯数论方法及其在统计中的应用，见 The Development of Statistics（Recent Contribution from China），Edited by Chen Xi Ru etc，longman，1991，139～159（英

文，与方开泰合作）.

74．求解非线性方程组的序贯程序，计算数学，9:1，1991，9～16（英文，与方开泰合作）.

75．在单位球上生成均匀分布的一个新方法，Tach. Rep. Hong Kong Baptist College，15，1992（英文，与方开泰及H. L. Wong合作）.

76．同余式的最小解，J. Number Theory，45:3，1993，261～280（英文）.

77．有限域上二次型的最小零点Ⅱ，数学学报（新辑）4，1993，382～389（英文）.

78．数论方法在统计中的某些应用，Stat. Sci；9:3，1994，416～428（英文，与方开泰及P. M. Bentler合作）.

79．混料均匀设计，中国科学（A），26:1，1996，1～10（与方开泰合作）.

80．陈景润：生平与工作简介，数学学报，39:4，1996，433～441（与潘承洞合作）.

81．潘承洞：生平与工作简介，数学学报，3，1998，449～454.

Ⅱ 专著与书

1．积分的近似计算，科学出版社，1961（与华罗庚合作）.

2．数值积分及其应用，科学出版社，1963（与华罗庚合作）.

3．谈谈素数，上海教育出版社，1978，修订：广东科技出版社，1996.

4．数论在近似分析中的应用，科学出版社，1978；Springer-Verlag与科学出版社，1981（英文，与华罗庚合作）.

5．Goldbach猜想，World Sci. puh. Comp；1984（英文），黑龙江教育出版社，1987.

6. 数论及其应用在中国, Cont, Math, AMS, 77, 1988 (英文, 与潘承彪及 C. C. Yang 合编).
7. 数学模型选谈, 湖南教育出版社, 1991; Populariging Mathematical Methods in the People's Republic of China, Birkhauser Boston, 1989 (英文, 与华罗庚合作).
8. 现代数学讲义, 科学出版社, 1990 (英文, 与张恭庆等合编).
9. 代数数域上的丢番图方程与不等式, Springer-Verlag, 1991 (英文).
10. 纪念华罗庚国际会议文集, 卷 1, 数论, 卷 2, 分析, Springer-Verlag 与科学出版社, 1991 (英文, 与龚升, 陆启铿, 杨乐合编).
11. 数论方法在统计中的应用, Chapman and Hall, 1994, (英文, 与方开泰合作), 科学出版社, 1996.
12. 华罗庚, 开明出版社, 1995; 九章出版社 (台湾) 1995 (繁体字版), Springer-Verlag, 1998 (英文), Springer-Verlag (日文, 待出版).
13. 微积分学, Springer-Verlag, 1997 (与方源合作).
14. 王元论哥德巴赫猜想, 山东教育出版社, 1999.
15. 王元文集, 湖南教育出版社 (待出版).